正多面体を角材や板材で作る Polyhedron made of Timber or Plate
--- 建築と数学のコラボ Collaboration of Architecture and Mathematics ---

2016/11/06

金沢市立工業高等学校 数学科 森下公博
Kimihiro Morishita
Sec.of Math. KanazawaMunicipalTechnicalHighschool

追記　まとめの章に製作に必要な寸法の表を追加しました。2018/06/28

木造り(きづくり)は木造建築の要です。
数学で扱う立体、主に正多面体を角材でつくるために必要な墨線の引き方、所謂、墨出し(Marking)を考えます。その後、板材でも作るための墨線を考えます。
実際にこのようなものを日頃作っている大工さんにとっては笑止かもしれませんが、あえて数学的に作ってみます。組木の技術を使わずに単純な部品を作り、それを接着させて作るとします。このような場合にダボを使って接合する方法もあるそうです。あながち間違いではないかと思います。
日本の木造建築技術は世界一です。先日の NHK のテレビ番組によればドイツの木工技術も大したものですが・・・。プロの大工さんから、全くの建築素人のために参考になるご指摘やご指導などを頂ければ幸いです。

目次

角材による製作 Made of Timber

Sec.1　正 4 面体 Marking of Regular Tetrahedron

各辺の長さが L、角材の断面は正方形としてその 1 辺の長さは M とする。正 4 面体 ABCD を角材の外側の稜線の形として考える。

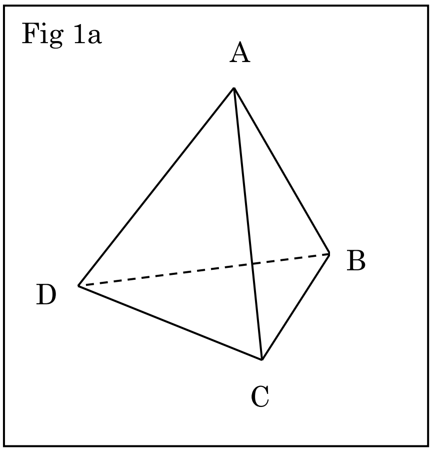


Fig 1a

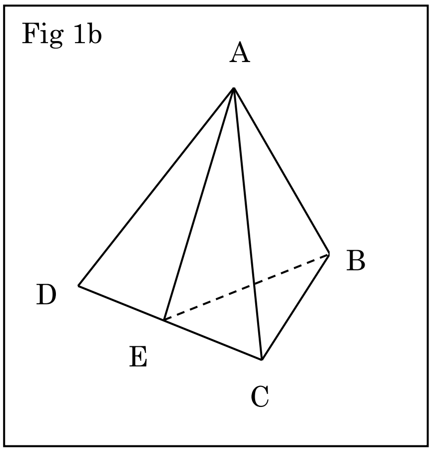


Fig 1b

辺 CD の中点を E とし、断面の三角形 ABE を考える。

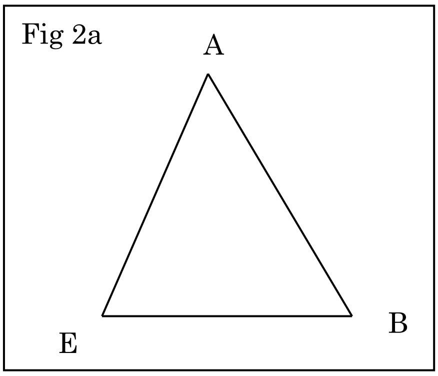


Fig 2a

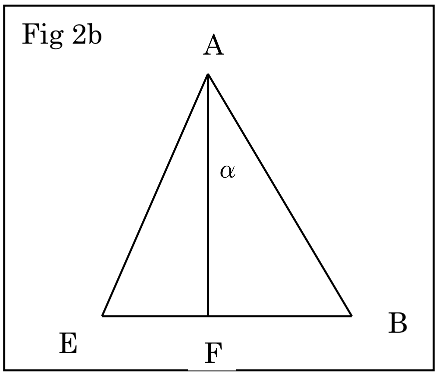


Fig 2b

A から辺 BE に垂線を下し、その足を F とする。直線 AF は 3 角形 BCD の回転に関する対称軸であり、点 F は 3 角形 BCD の外心であるが、3 角形 BCD は正 3 角形なので、点 F は 3 角形 BCD の重心にもなっている。そのため計算は楽である。$\angle BAF = \alpha$　とする。以後この角度を<u>**垂直接合角（Vertical Joint Angle）**</u>と呼ぶことにする。

$AB = L \quad AE = BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}L \quad BF = BE \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}L$　であるので、

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　となる。

ここで、正四面体を点 A の真上から見た図 3 を考える。角材の様子も付け加える。

しばらく、この図を、頂点 A に接した水平面に投影したものと考える。そうすると

$\angle G1AG3 = 120° \quad AB \perp G1G3$　であるので　$\angle G1AG2 = 60°$　以後、この角 G1AG2 を<u>**水平接合角（Horizontal Joint Angle）**</u>と呼ぶことにする。さらに　$G1G3 = \sqrt{2}M$ であるから　$G1G2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}M$　さらに　$\dfrac{G1G2}{AG2} = \tan 60° = \sqrt{3}$　であるので　$AG2 = \dfrac{G1G2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}M$　が得られる。以後これを<u>**接合深さ**</u>

（**Joint Depth**）と呼ぶことにする。これが大切な値となる。正 4 面体や立方体、正 12 面体でも、3 本の角材が対称的に 1 点に集まる場合はこの値はすべて同じである。この図はすべて共通であるからである。

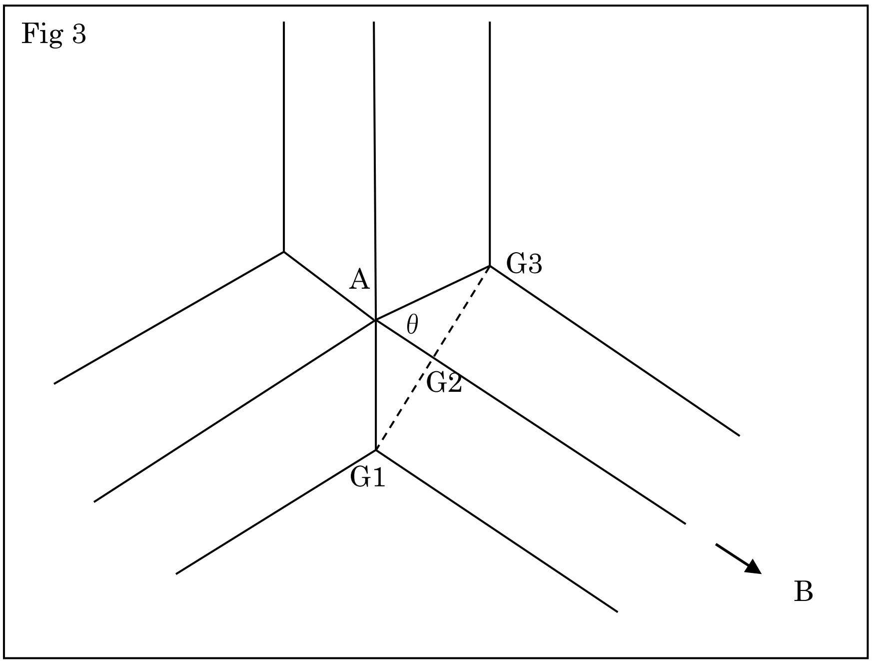


Fig 3

水平接合角 θ と接合深さ t の関係は $t = \dfrac{M}{\sqrt{2}\tan\theta}$ である。

ここで、図 2b の視点から見た、部材の断面の投影図を考える。

図 3 の点 A を図 4 では A1 とする。図 3 の G1 と G2 と G3 は図 4 では重なって G となっている。図 3 の点 A の真下に図 4 の A4、A5、A6 がある。A1A3 は角材の縦の断面の対角線なので $A1A3 = \sqrt{2}M$

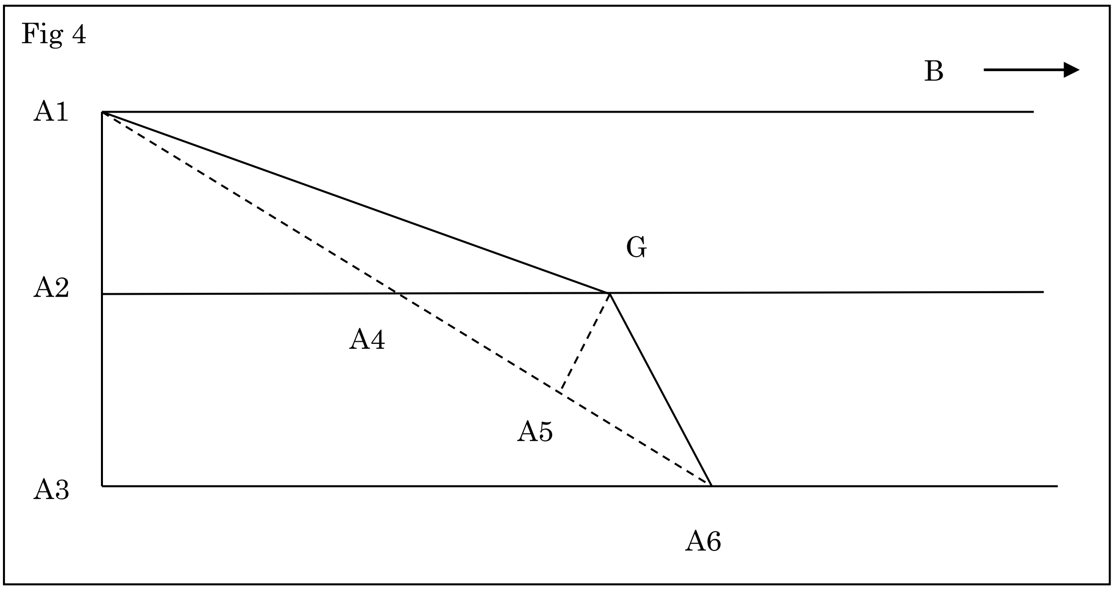


Fig 4

また、図 2b の角 α と同じものが角 BA1A6 となる。 $\angle BA1A6 = \alpha = \angle A1A6A3$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{A1A3}{A3A6}$ 従って $A3A6 = \sqrt{2}A1A3 = 2M \cdots$① また $A2A4 = M$

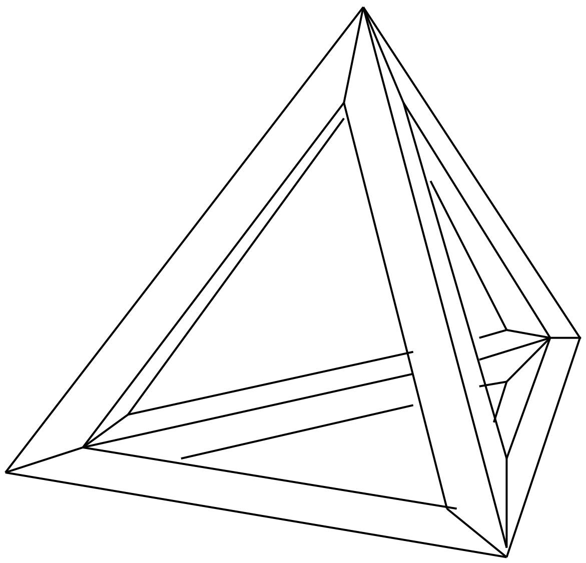
ここで 図 3 の AG2 が図 4 の A5G となって表れる。 $A5G = \dfrac{1}{\sqrt{6}}M$

勿論 $A1A6 \perp A5G$ であるので $\Delta A1A2A4 \backsim \Delta GA5A4$ また $A1A6=\sqrt{6}M$

従って $A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \sqrt{6} : \sqrt{2}$

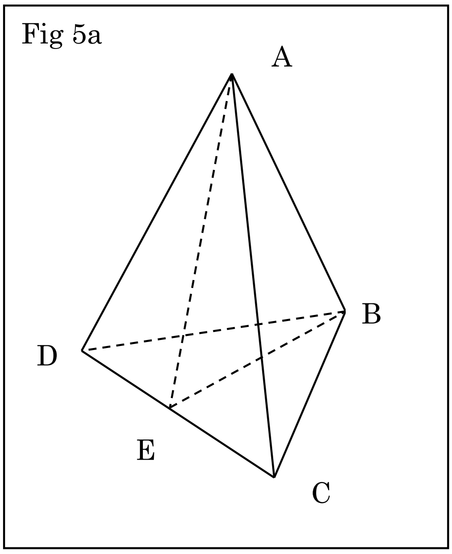
$$A4G = \sqrt{3}A5G = \frac{1}{\sqrt{2}}M \qquad A2G = A2A4 + A4G = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)M \fallingdotseq 1.71M \cdots ②$$

式①が表す長さを<u>下部長(Under Length)</u>、式②が表す長さを<u>側部長(Side Length)</u>ということにする。これらを用いて、角材に墨線を描く。A1G と GA6 である。G に鋸を入れ、A1 と A6 へ進ませる。これを向こう側からも切る。両端を同様に加工した部材を 6 本作り、組み合わせると少し膨らみがある正四面体ができる。



写真は L=77cm　M=10.5cm のもの。

第 26 回全国産業教育フェア石川大会のモニュメントとして、不等辺正 3 角錐を作ることになった。
底辺は 1 辺 L の正 3 角形、側面は各辺が kL　kL　L の 2 等辺 3 角形のものを考える。



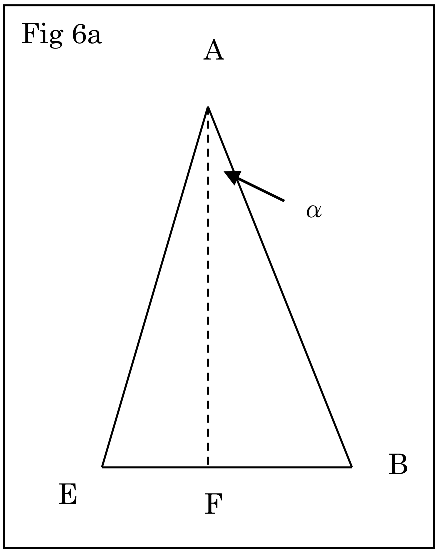


図 5a で $AB = AC = AD = kL \quad BC = CD = DB = L$ とする。辺 CD の中点を E とする。
まず点 A における接合を考える。辺 AB,AC,AD 即ち部材①について調べる。辺 BC,CD,DB は部材②とする。

$$AE = \sqrt{(kL)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}L = \frac{L\sqrt{4k^2-1}}{2}$$

$AF = yL \quad BF = xL$　とすると

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 & \cdot\cdot\cdot ① \\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + y^2 = \dfrac{4k^2-1}{4} & \cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

①−②　$x^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 = k^2 - \dfrac{4k^2-1}{4} \qquad x^2 - \dfrac{3}{4} + \sqrt{3}x - x^2 = k^2 - k^2 + \dfrac{1}{4}$

$\sqrt{3}x = 1 \qquad x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　点 F は 3 角形 ABC の外心即ち重心なのは当たり前でした。

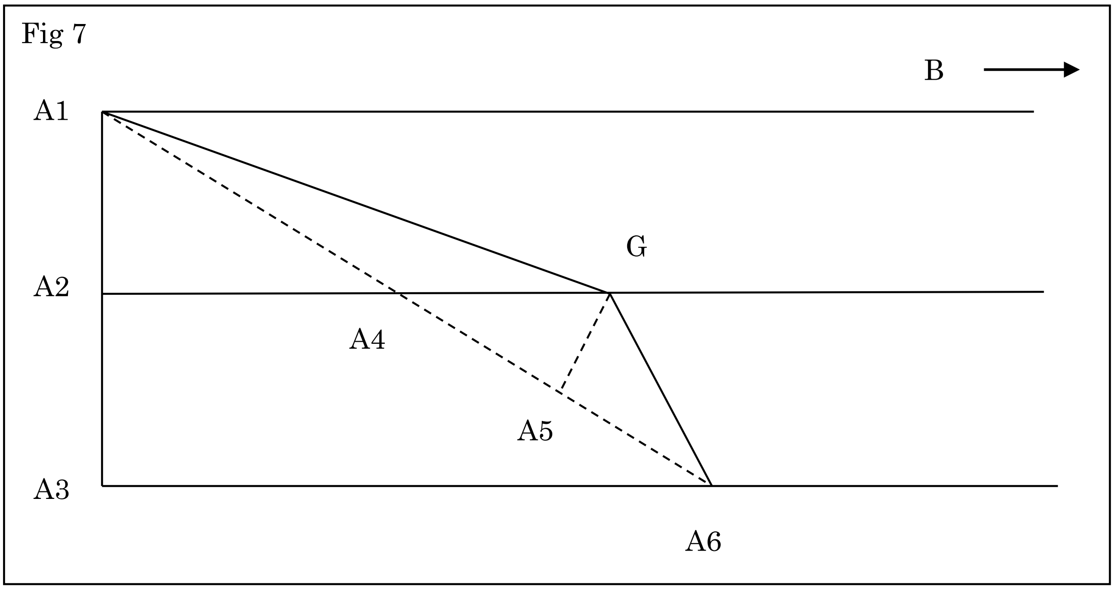
$$\sin\alpha = \frac{xL}{kL} = \frac{1}{k\sqrt{3}} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{3k^2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{3k^2-1}{3k^2} \qquad \tan^2\alpha = \frac{1}{3k^2-1} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3k^2-1}}$$

点 A における水平接合角 θ と接合深さ t は正 4 面体と同一で　$\theta = 60° \quad t = \dfrac{M}{\sqrt{2}\tan\theta} = \dfrac{M}{\sqrt{6}}$

下部長 A3A6 について　$\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3k^2-1}} = \dfrac{\sqrt{2}M}{A3A6} \qquad A3A6 = \sqrt{2}\sqrt{3k^2-1}M$　・・・①

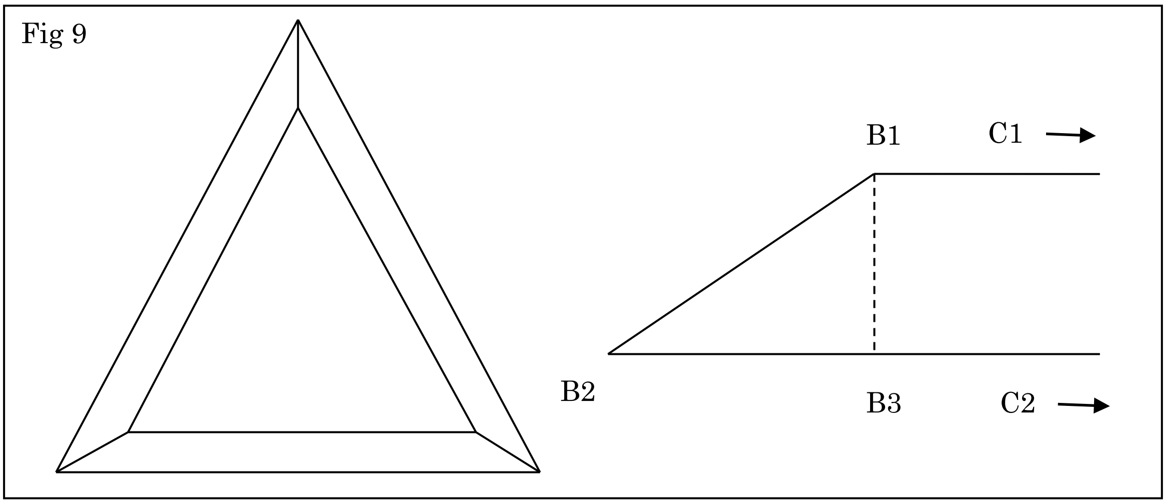
側部長 A2G について　$A2G = \dfrac{A3A6}{2} + \dfrac{t}{\sin\alpha} = \left(\dfrac{\sqrt{3k^2-1}}{\sqrt{2}} + \dfrac{k\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)M = \dfrac{\sqrt{3k^2-1}+k}{\sqrt{2}}M$　・・・②

これで部材①の点 A 側の墨出しができる。



次に点 B における接合を考える。今回作成するモニュメントはかなりの大きさで、点 B における接合強度が問題であるので、思い切って単純な構造をとることにする。確かに次に示すように部材②は単純なのだが、部材①の接合部は多少複雑なものになる。墨出しも切削も面倒である。

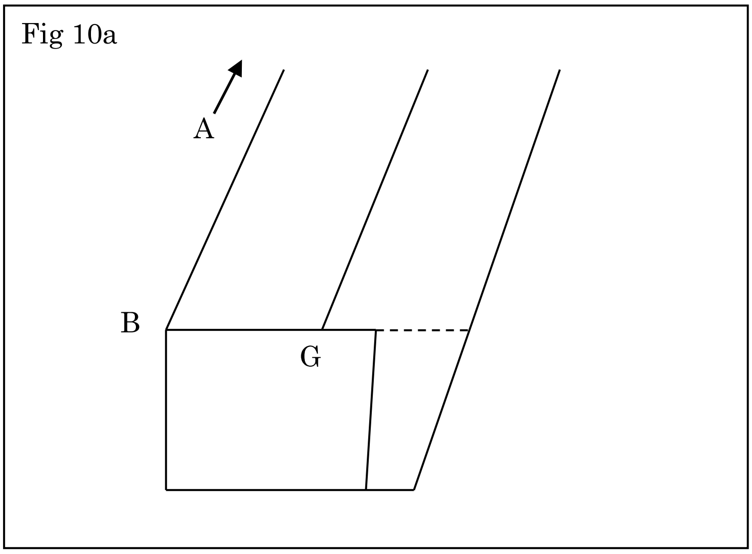
底になる部材②は正三角形の単純な枠のみとする。枠の内法の 1 辺を L とする。この隅に上部から部材①がはまり込む。



枠は 3 本の部材②からなる。図 9 で、$B1C1 = L$　$\angle B1B2B3 = 30°$　$B1B3 = M$　であるから、

$B2B3 = \sqrt{3}M$　$B2C2 = L + 2\sqrt{3}M$　となる。これで底部ができる。

この底部の隅に部材①の図 10a のものが上からはまり込むようにする。



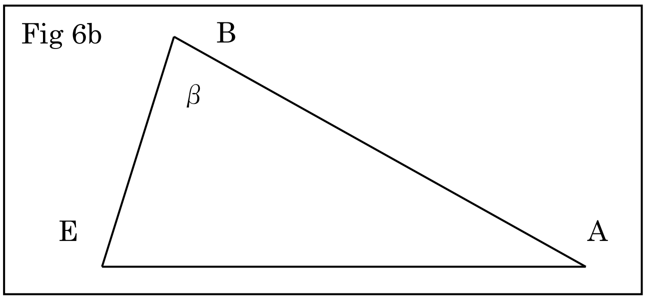


図 6b で、$AB = kL$　　$BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}L$　　$AE = \dfrac{\sqrt{4k^2 - 1}}{2}L$　であった。余弦定理より、

$$\cos\beta = \frac{k^2 + \frac{3}{4} - \frac{4k^2 - 1}{4}}{2 \times k \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}k} \qquad \cos^2\beta = \frac{1}{3k^2} \qquad \sin^2\beta = \frac{3k^2 - 1}{3k^2}$$

$$\tan^2\beta = 3k^2 - 1 \qquad \tan\beta = \sqrt{3k^2 - 1}$$

この角 β が点 B における部材①の垂直接合角になるが、今回は部材①の B 側の墨出しは特別なものとなる。図 10b で、

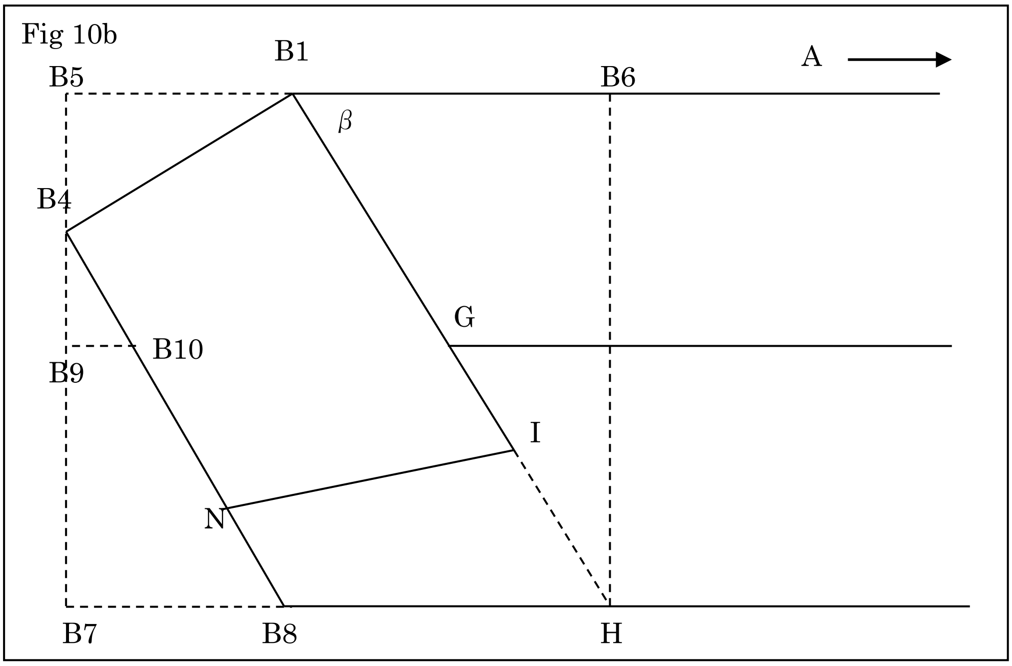
$B6H = \sqrt{2}M$　　$B1B4 = M$　　$\angle AB1H = \angle B5B4B1 = \angle B7B8B4 = \beta$　であるので

$$B5B1 = M\sin\beta = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3}k}M \qquad B5B4 = M\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}k}M$$

$\tan\beta = \sqrt{3k^2 - 1} = \dfrac{\sqrt{2}M}{B1B6}$　なので　$B1B6 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3k^2 - 1}}M$

$B4B7 = \sqrt{2}M - B4B5 = \left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}k}\right)M$　また　$\tan\beta = \sqrt{3k^2 - 1} = \dfrac{B4B7}{B7B8}$　であるので

$$B7B8=\frac{B4B7}{\sqrt{3k^2-1}}=\frac{\sqrt{6}k-1}{\sqrt{3}\sqrt{3k^2-1}k}M$$



問題は点 I の位置である。そのために B1GH を通る仮想断面 図 11 を考える。

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}M}{B1H}$ であるから $B1H=\dfrac{\sqrt{2}M}{\sin\beta}=\dfrac{\sqrt{6}k}{\sqrt{3k^2-1}}M$ を求めておく。

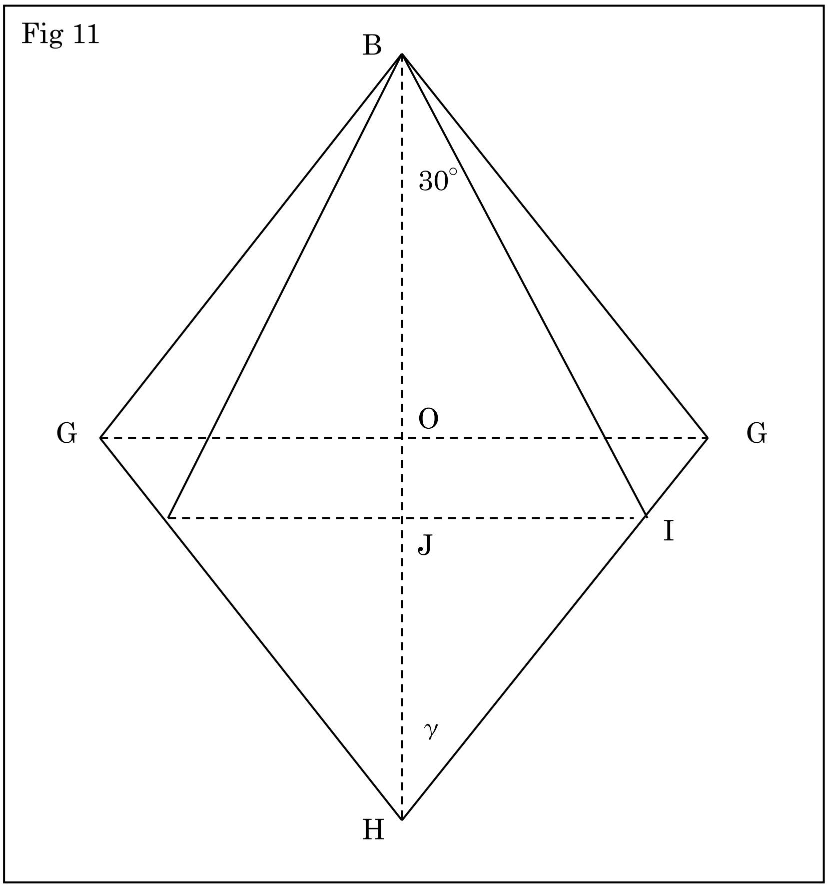


図 10b の B1H が図 11 では BH である。点 B に、図 10b の B1 と B4 が重なる。

$$BH = \frac{\sqrt{6}k}{\sqrt{3k^2 - 1}} M \qquad OH = \frac{BH}{2} = \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{2}\sqrt{3k^2 - 1}} M \qquad OG = \frac{GG}{2} = \frac{M}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\gamma = \frac{OG}{OH} = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3}k} \qquad \tan^2\gamma = \frac{3k^2 - 1}{3k^2} = \frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}$$ であるが

$$\sin^2\gamma = \frac{3k^2 - 1}{6k^2 - 1} \qquad \cos^2\gamma = \frac{3k^2}{6k^2 - 1}$$ と解けるので $$\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{6k^2 - 1}}$$

さらに $$\frac{JI}{BJ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \frac{JI}{HJ} = \tan\gamma = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3}k}$$ であるので

$$JI = \frac{BJ}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3}k} HJ$$ 従って $$BJ = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{k} HJ$$

さらに $$BJ + HJ = \left(\frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{k} + 1 \right) HJ = \frac{\sqrt{3k^2 - 1} + k}{k} HJ = BH = \frac{\sqrt{6}k}{\sqrt{3k^2 - 1}} M$$ であるので

$$HJ = \frac{\sqrt{6}k^2}{\sqrt{3k^2 - 1}\left(\sqrt{3k^2 - 1} + k\right)} M$$ が求まる。

$$\frac{HJ}{HI} = \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{6k^2 - 1}}$$ であるから $$HI = \frac{\sqrt{6k^2 - 1}}{\sqrt{3}k} HJ = \frac{\sqrt{2}k\sqrt{6k^2 - 1}}{\sqrt{3k^2 - 1}\left(\sqrt{3k^2 - 1} + k\right)} M$$

B4B8 の墨出しのために B9B10 も求めておく。

$$\frac{B9B10}{B7B8} = \frac{B4B9}{B4B7}$$ であるので

$$B9B10 = \frac{B4B9 \times B7B8}{B4B7} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{k\sqrt{3}} \right)}{\left(\sqrt{2} - \frac{1}{k\sqrt{3}} \right)} \times \frac{\left(k\sqrt{6} - 1\right)M}{k\sqrt{3}\sqrt{3k^2 - 1}} = \frac{\frac{k\sqrt{6}}{2} - 1}{k\sqrt{6} - 1} \times \frac{\left(k\sqrt{6} - 1\right)M}{k\sqrt{3}\sqrt{3k^2 - 1}} = \frac{\frac{k\sqrt{6}}{2} - 1}{k\sqrt{3}\sqrt{3k^2 - 1}} M$$

これで部材①の B 側の墨出しがすべてできる。

図 10b で点 I から左に伸びる線 IN が B1B4 と平行になるように思うかもしれないが、そうはならない。なぜなら B4B8 を通る断面は図 11 の点 I の真上を通らないからである。点 N の墨出しは、断面 A4A8 を作ってから、直線 B4B8 から 30 度開いた点とすればよい。計算でも求められるが、このほうが簡単である。三角定規の出番である。

実際の制作時では、まず B1B4 の断面を切り出し、直線 B1B4 を引く。次に断面 B4B8 を切り出し、直線 B4B8 から 30 度開いた点 N を取り、直線 IN を引くとよい。

例　$k=2$ の場合

部材①どうしの下部長　$A3A6=\sqrt{2}\sqrt{3k^2-1}M=\sqrt{22}M=4.690M$

部材①どうしの側部長　$A2G=\dfrac{\sqrt{3k^2-1}+k}{\sqrt{2}}M=\dfrac{\sqrt{11}+2}{\sqrt{2}}M=3.759M$

部材①の B 側について

$$B5B1=\frac{\sqrt{3k^2-1}}{\sqrt{3}k}M=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}M=0.957M$$

$$B5B4=\frac{1}{\sqrt{3}k}M=\frac{1}{2\sqrt{3}}M=0.289M$$

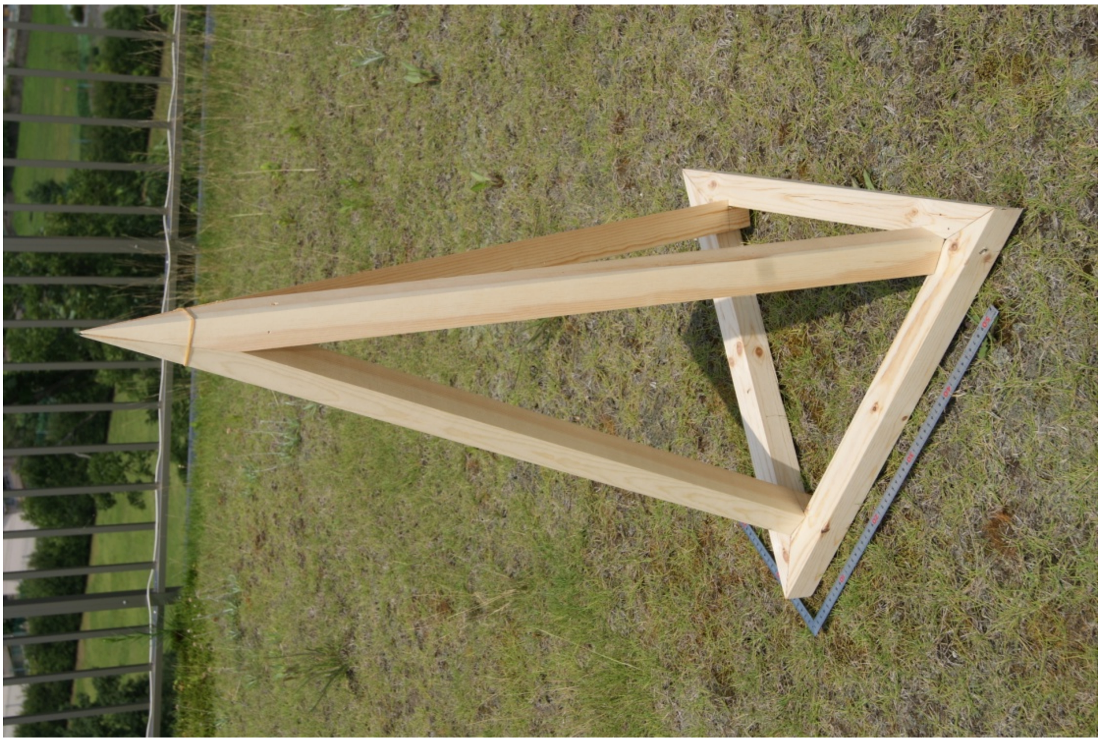
$$B1B6=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3k^2-1}}M=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}M=0.426M$$

$$B7B8=\frac{\sqrt{6}k-1}{\sqrt{3}\sqrt{3k^2-1}k}M=\frac{2\sqrt{6}-1}{2\sqrt{33}}M=0.339M$$

$$B9B10=\frac{\dfrac{k\sqrt{6}}{2}-1}{k\sqrt{3}\sqrt{3k^2-1}}M=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{33}}M=0.126M$$

$$HI=\frac{\sqrt{2}k\sqrt{6k^2-1}}{\sqrt{3k^2-1}\left(\sqrt{3k^2-1}+k\right)}M=\frac{2\sqrt{46}}{\sqrt{11}\left(\sqrt{11}+2\right)}M=0.769M$$

写真は k=2　L=46cm　M=40mm のもの。上部はとりあえず輪ゴムで止めてある。



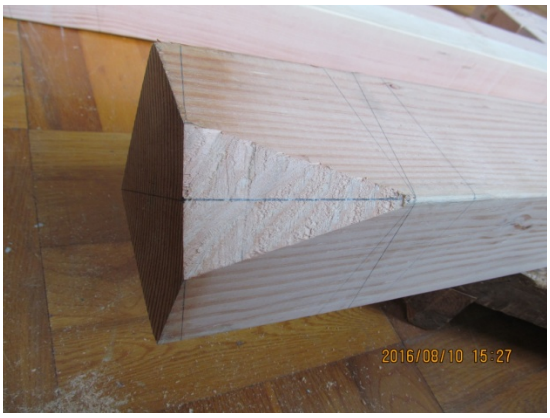
部材①の基部

部材①の先端部

部材②を組んだもの及び①との接合部

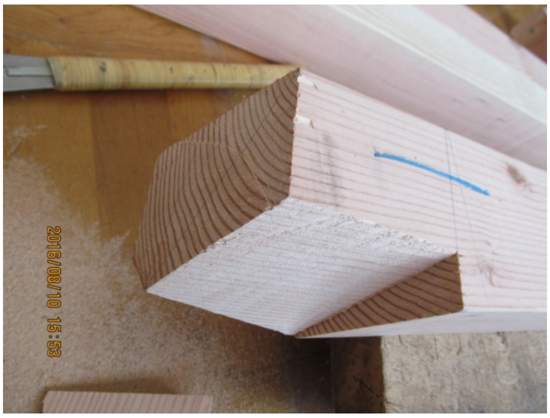
もう一度説明します。

まず B1B4 の断面を切り出し、直線 B1B4 を引く。次に断面 B4B8 を切り出し、



そこに、直線 B4B8 を引き、30 度開いた点 N を取り、直線 IN を引く

直線 IN と直線 B1B4 を通るように切り出す。両側とも切り出す。



夏休みをかけてやっと部品ができた。 k=2　L=2.5m　M=105mm 出来上がりの高さは約 4.9m。

仮組みしてみました。

産業教育フェア 2016 会場にて

Sec.2　正 6 面体(立方体) Marking of Regular Hexahedron

正 6 面体すなわち立方体も正 4 面体とほぼ同様に考えられる。接合部のみを考えるので、立方体全体でなく、その一部分である正 3 角錐 ABCD を考える。正 4 面体では角 BAC などは 60° だったが、立方体では角 BAC や角 CAD や角 BAD は 90° となる。正 3 角形 BCD を底面とする。

$AB = AC = AD = L \quad BC = CD = DB = \sqrt{2}L$　である。

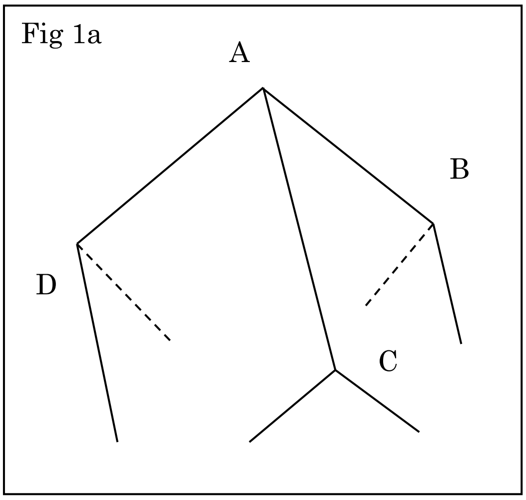


Fig 1a

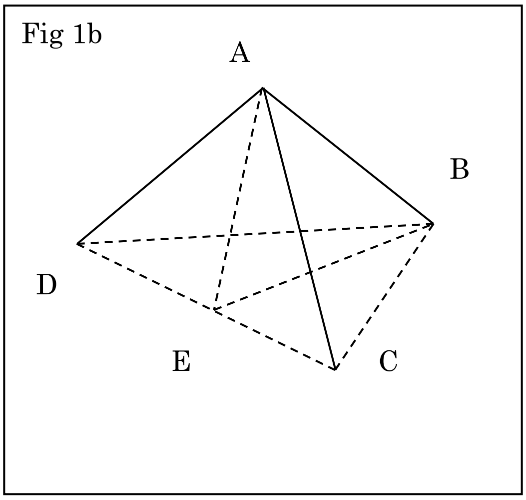


Fig 1b

やはり、辺 CD の中点を E とし、図 2 で 3 角錐を縦に切った断面の 3 角形 ABE を考える。
A から辺 BE に垂線を下し、その足を F とする。正 4 面体の場合と同じく点 F は正 3 角形 BCD の外心即ち重心である。垂直接合角 $\angle BAF = \alpha$ とする。

$AB = L \quad AE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}L \quad BE = \dfrac{\sqrt{6}}{2}L \quad BF = BE \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}L$　であるので、

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \tan\alpha = \sqrt{2}$　となる。

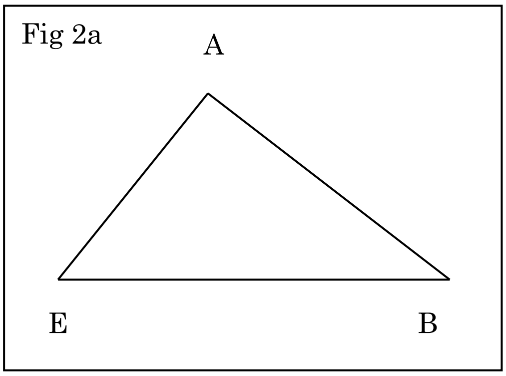


Fig 2a

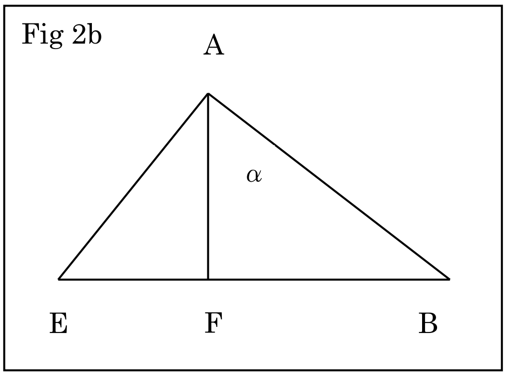


Fig 2b

ここで、正 4 面体を点 A の真上から見た図 3 を考える。角材の様子も付け加える。

正 4 面体の場合と完全に同一の図であり接合深さは　$AG2 = \dfrac{G1G2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}M$　となる。

ここで、図 2b の視点から見た、部材の断面の投影図 図 4 を考える。
図 3 の点 A を図 4 では A1 とする。図 3 の G1 と G2 と G3 は図 4 では重なって G となっている。図 3 の点 A の真下に図 4 の A4、A5、A6 がある。A1A3 は角材の縦の断面の対角線なので

$A1A3 = \sqrt{2}M \quad A1A2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}M$

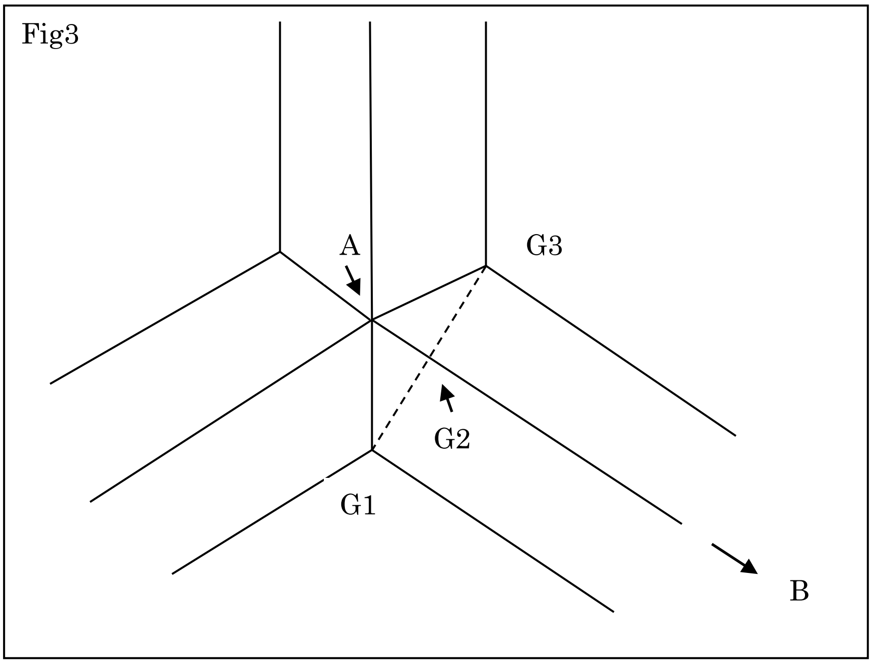


Fig3

また、図 2b の角 α と同じものが角 BA1A6 となる。 $\angle BA1A6 = \alpha = \angle A1A6A3$

$\tan\alpha = \sqrt{2} = \dfrac{A1A3}{A3A6}$　従って $A3A6 = \dfrac{A1A3}{\sqrt{2}} = M$ …①　また $A2A4 = \dfrac{M}{2}$

ここで 図 3 の AG2 が図 4 の A5G となって表れる。 $A5G = \dfrac{1}{\sqrt{6}}M$

勿論 $A1A6 \perp A5G$ であるので $\Delta A1A2A4 \backsim \Delta GA5A4$　また $A1A6 = \sqrt{3}M$

従って $A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

$A4G = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}A5G = \dfrac{1}{2}M$　　$A2G = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right)M = M$ …②

となり、当然至極の図形が得られる。両端を同様に加工した部材を 12 本作って組み合わせると立方体になる。

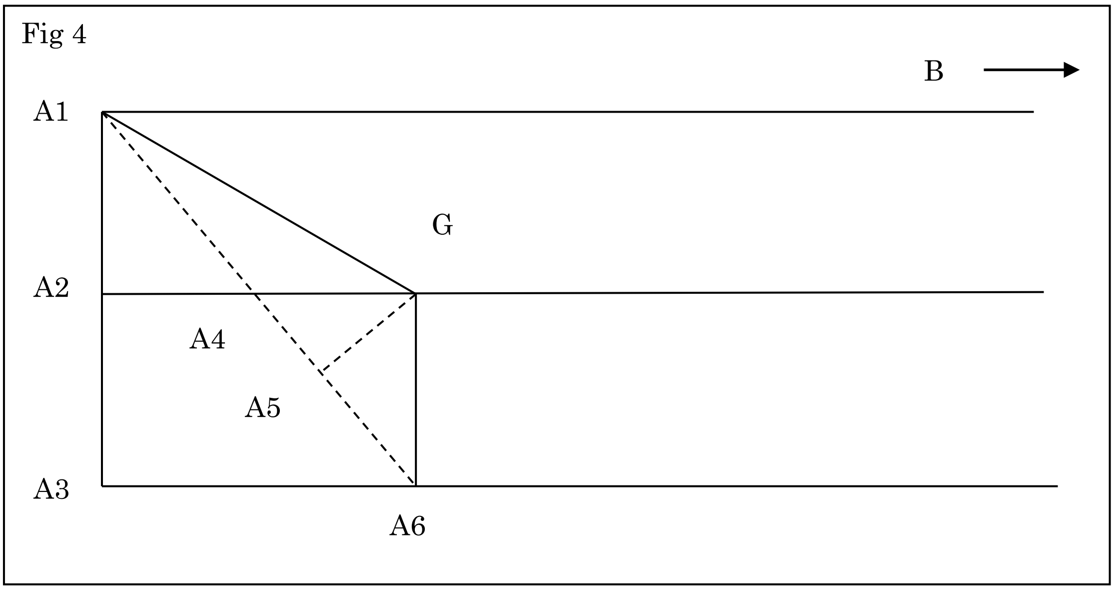
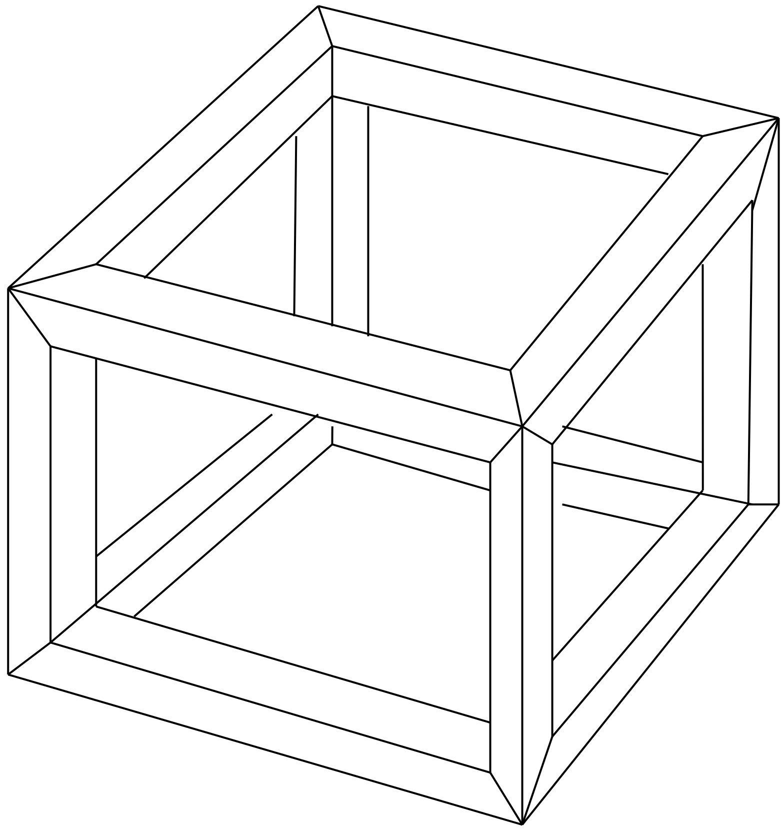


Fig 4



Sec.3　正 8 面体 Marking of Regular Octahedron

一辺が L の正 3 角形 8 面で構成される。

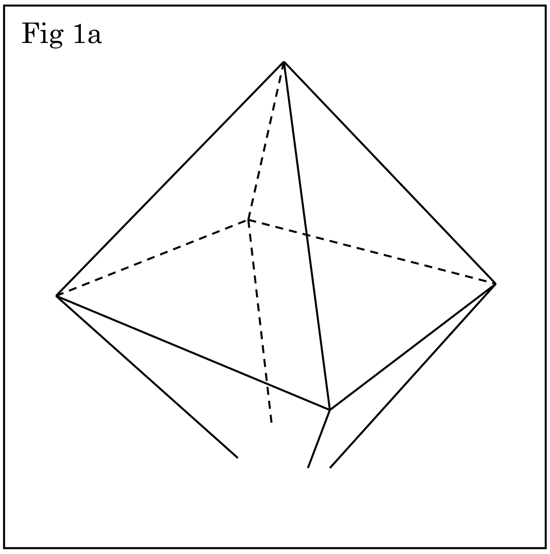


Fig 1a

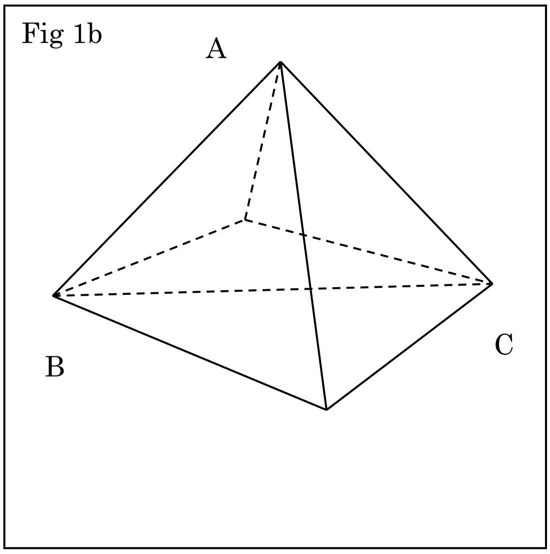


Fig 1b

上半分の正 4 角錘を考える。その断面、3 角形 ABC を考える。

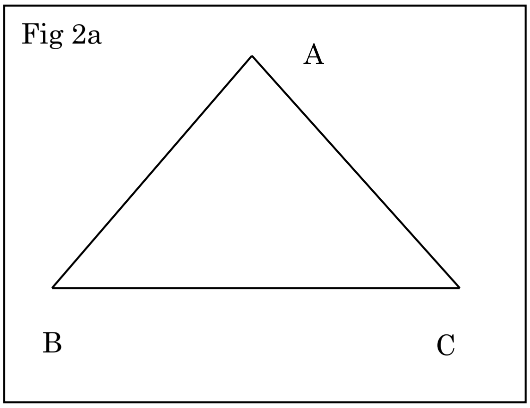


Fig 2a

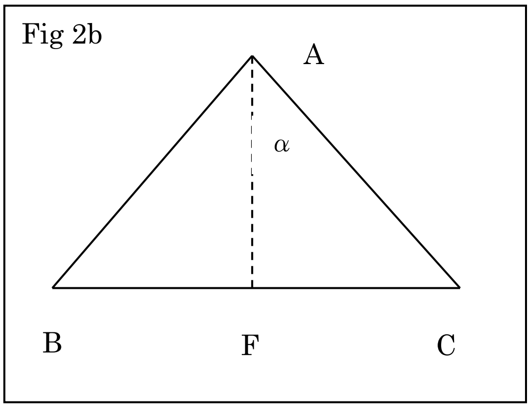


Fig 2b

$AB = AC = L \quad BC = \sqrt{2}L$ であるから 3 角形 ABC は直角 2 等辺 3 角形で A から BC に下した垂線の足 F とすると、角 CAF 即ち垂直接合角 α は 45° である。従って $\tan\alpha = 1$ となる。
対称性が高いので計算は楽である。接合部は 4 つの部材が対称的に集まるので大変単純である。点 A の真上から見た接合部の様子は図 3 のようになる。

部材の角材の切り口の一辺を M とすると、$G1G3 = \sqrt{2}M \quad G2G3 = \dfrac{\sqrt{2}M}{2} = \dfrac{M}{\sqrt{2}}$

また、3 角形 AG2G3 は直角 2 等辺 3 角形なので接合深さ $AG2 = \dfrac{M}{\sqrt{2}}$ となる。

従って、角材の端の様子は図 4 のようになる。

$\angle BA1A6 = \angle A1A6A3 = \alpha = 45°$ 従って $A1A3 = A3A6 = \sqrt{2}M$ …①
3 角形 A1A2A4 も A4A5G も直角 2 等辺 3 角形である。また A5G は図 3 の AG2 なので

$$A2A4=\frac{\sqrt{2}}{2}M \qquad A5G=A5A4=\frac{\sqrt{2}}{2}M \qquad A4G=M$$

従って　$A2G=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)M \fallingdotseq 1.71M$ …②　　①と②より墨線 A1G と A6G が書ける。これが 12 本で正 8 面体ができる。

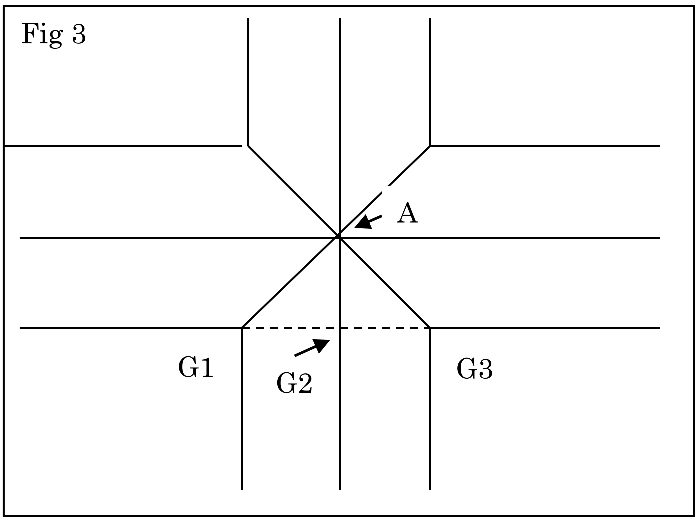


Fig 3

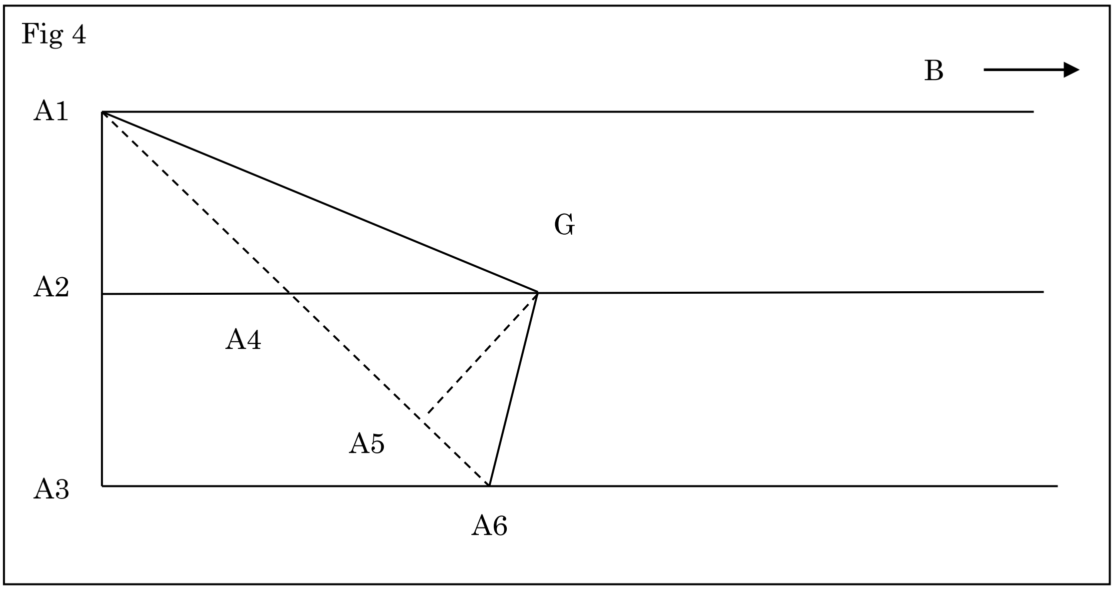
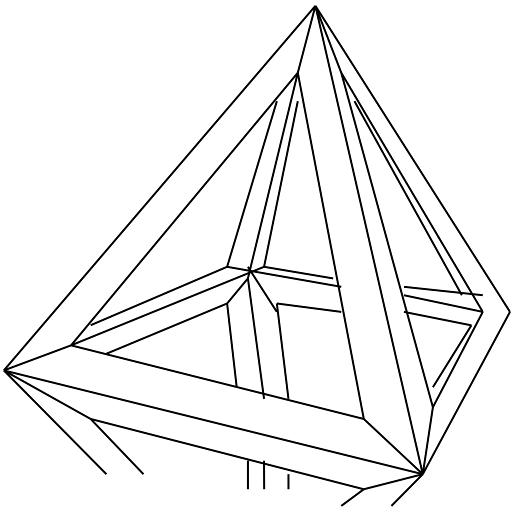
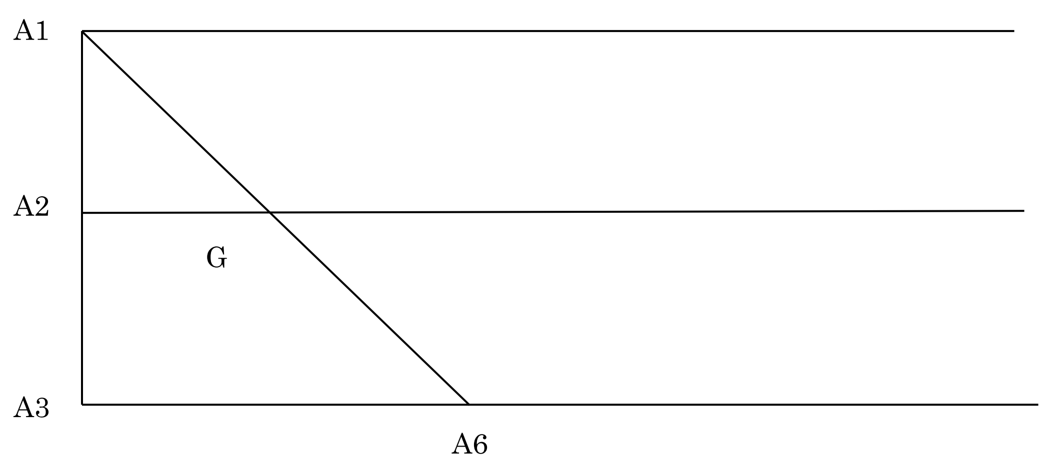


Fig 4



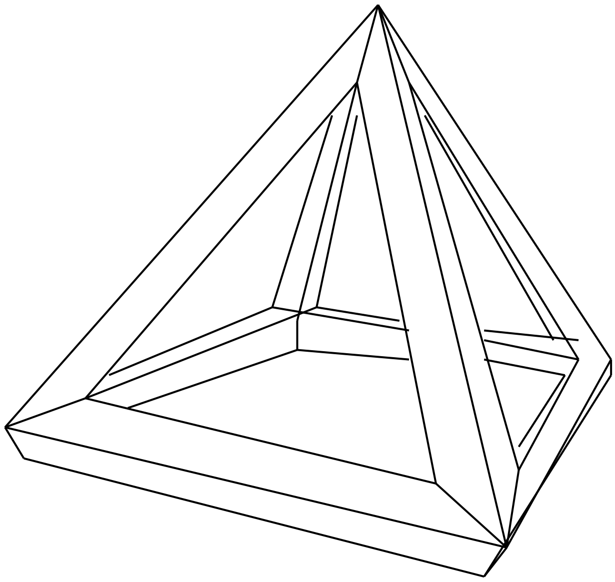
しかし、実際に 12 本の部材を用意するのは正 6 面体同様大変で、作ったとしても座りが悪い。風が吹いたら転がっていきそう。そこで、座りが良いと思われる、正 4 角錘を作った。部材は正 8 面体と同様のものが 4 本、残りの 4 本は片面の細工が正 8 面体と同様で、片面は接合深さを 0 にすればよい。その墨出しは簡単である。

Fig 4

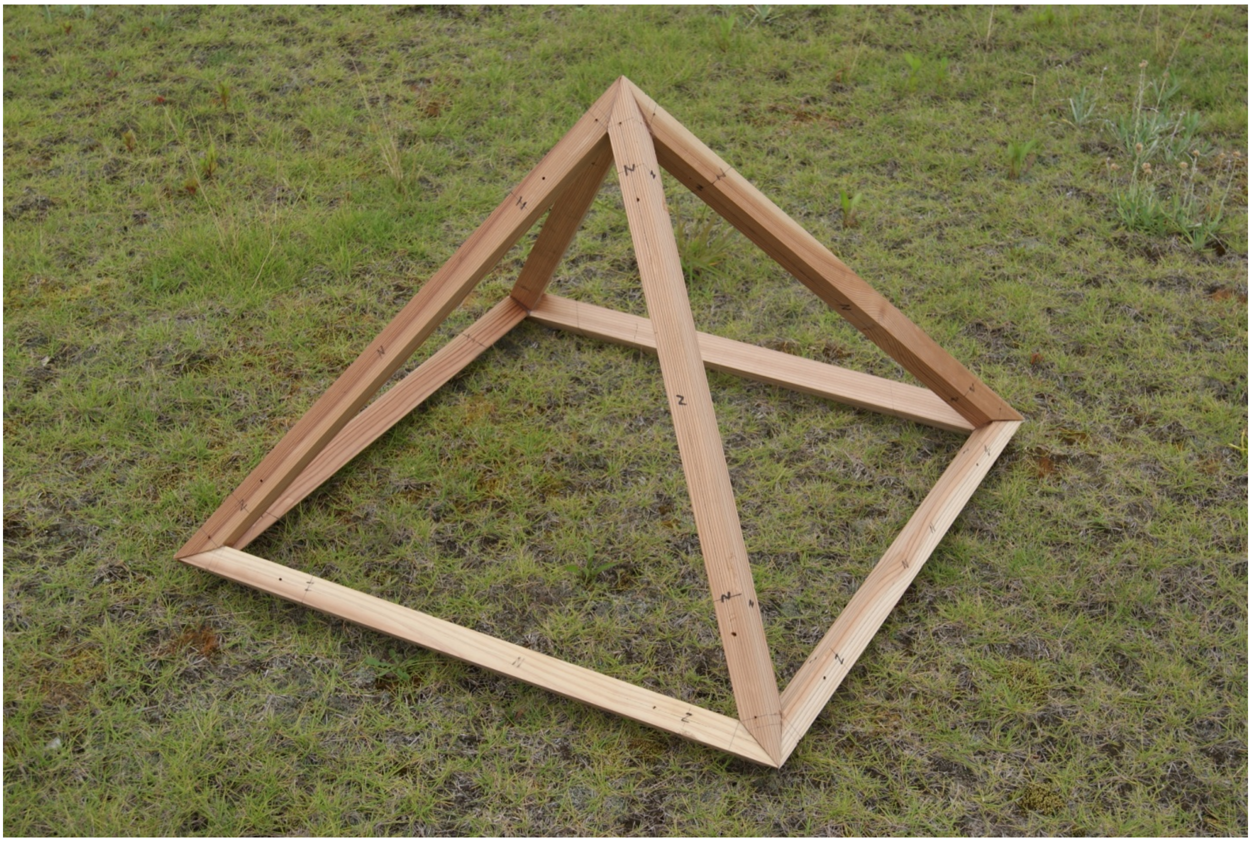


$A1A3 = A3A6 = \sqrt{2}M \cdots①$ $\qquad A2G = \dfrac{\sqrt{2}}{2}M \cdots②$

これを G から切始め、A1 と A6 まで進ませる。これなら庭におくオブジェとして使えそうである。

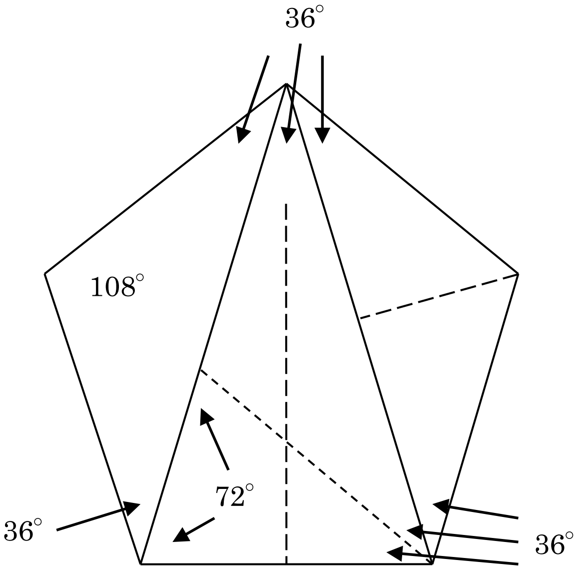


写真は廃材で作った正 4 角錘。廃材の断面は正方形でないので墨出しと切削は面倒であった。



Sec.4　　正 12 面体 Marking of Regular Dodecahedron

正 12 面体は正 5 角形 12 面でできている。1 つの頂点には正 5 角形 3 枚が集まる。角材 3 本ずつが接合するので正 4 面体や正 6 面体の要領が使える。まずは正 5 角形の復習から。
1 辺の長さが 1 の正 5 角形の 1 つの頂点から対角線 2 本を引く。



3 つの 2 等辺 3 角形のうち、真ん中に注目する。これは黄金 3 角形というそうです。等辺の長さ即ち正 5 角形の対角線の長さを x とする。小学生でもできる計算で、この 3 角形の底角 72° がわかる。その底角の片方の内角の 2 等分線を引く。するとその中にもう 2 つの 2 等辺三角形ができる。すると、相似な大と小の黄金 3 角形ができる。従って、

$x:1=1:(x-1)$　　$x(x-1)=1$　　$x^2-x-1=0$　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　$x>0$ であるので　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

従って、$\cos 72^\circ=\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\div x=\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　$\cos^2\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$

従って　$\sin^2\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$　だから　$\tan^2\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}=5+2\sqrt{5}$

従って　$\tan\dfrac{2\pi}{5}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

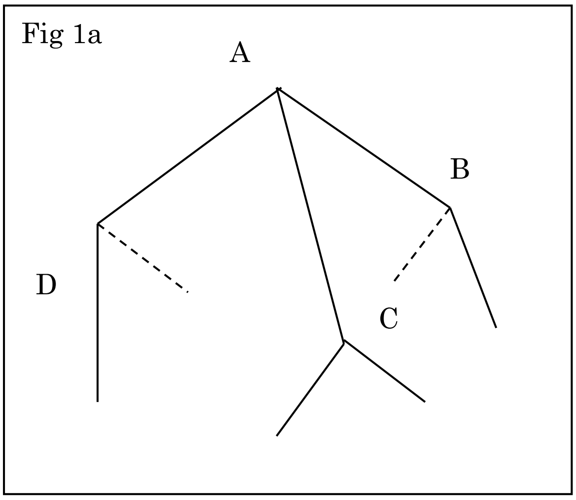
さらに、左右のひらべったい 2 等辺 3 角形に注目すれば　$\cos 36^\circ=\cos\dfrac{\pi}{5}=\left(\dfrac{x}{2}\right)\div 1=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

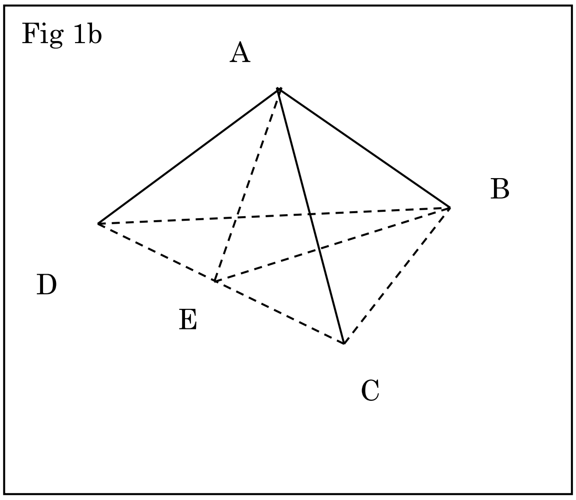
$\cos^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$　　従って　$\sin^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$　　だから

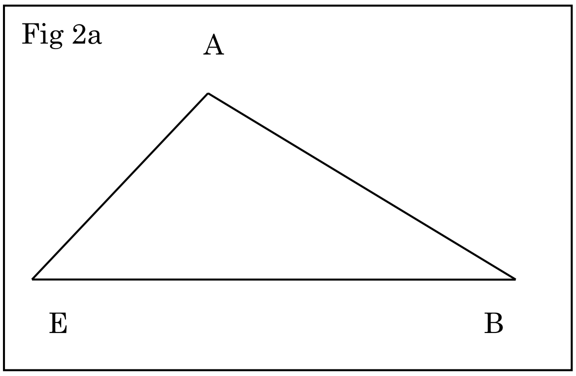
$\tan^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4}=5-2\sqrt{5}$　従って　$\tan\dfrac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$　　が得られる。

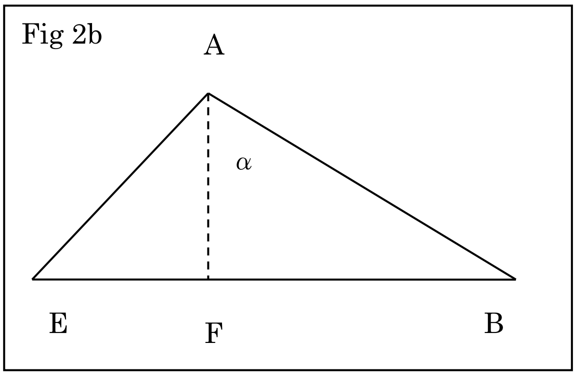
以下、所々でこれらの値を使うことになる。

次に、正 12 面体の結合部の様子を見てみよう。









正 4 面体や正 6 面体と同様に点 F は正 3 角形 BCD の外心即ち重心となる。

$$AB = AC = AD = L \qquad BC = CD = DB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}L \qquad CE = DE = \frac{\sqrt{5}+1}{4}L$$

$$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}L \qquad BF = BE \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}L$$ であるので、

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \qquad \sin^2\alpha = \frac{6+2\sqrt{5}}{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{6} \qquad \cos^2\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{6}$$

$$\tan^2\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{4}$$ 従って $\tan\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

接合部、点 A の真上から見た図は正 4 面体や正 6 面体の図 3 と同様である。従って、角材の正方形の切り口の一辺を M とするとき接合深さ $AG2 = \frac{1}{\sqrt{6}}M$ となる。

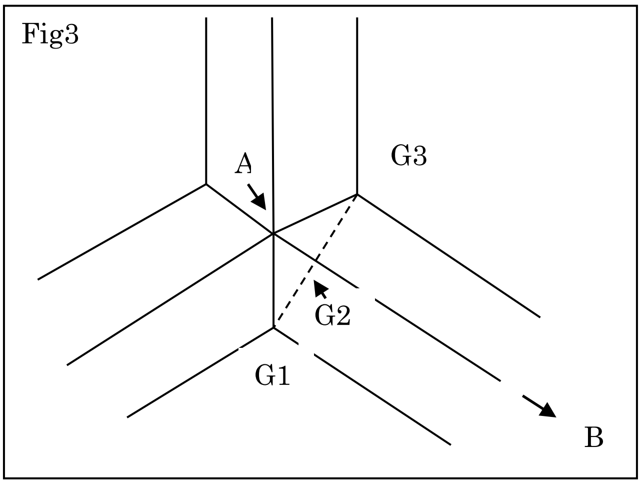
図 2b の向きから部材を見るのが図 4 である。図 3 の点 A の下に点 A4 や点 A5 がある。

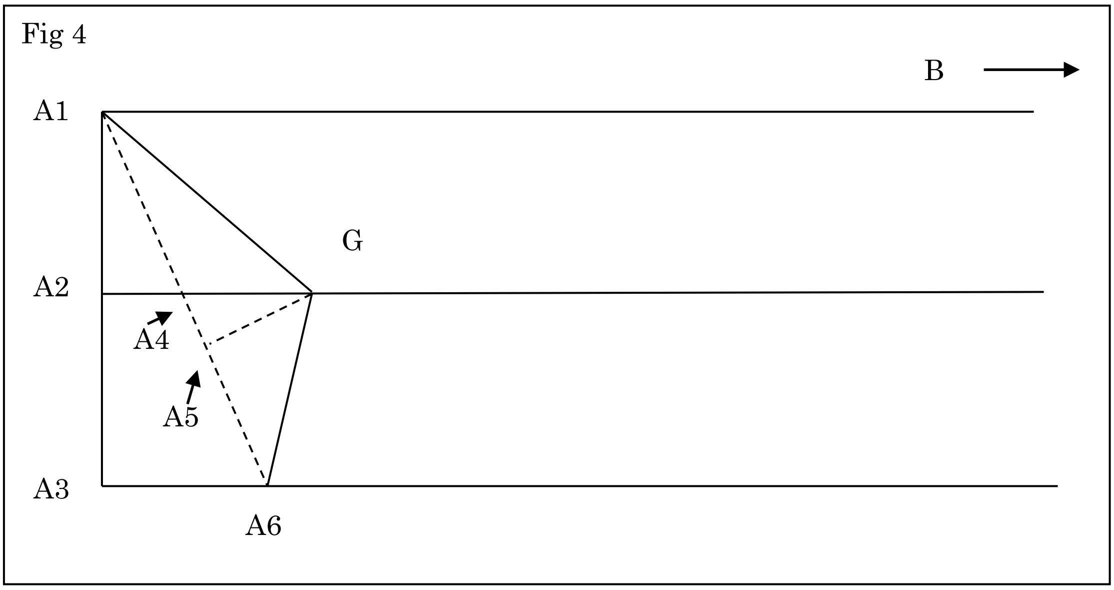
図 2b の角 α と同じものが角 BA1A6 となる。 $\angle BA1A6 = \alpha = \angle A1A6A3$

$$\tan\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{A1A3}{A3A6}$$ 従って

$$A3A6 = \frac{2A1A3}{3+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}M = \frac{2\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}M = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}M \fallingdotseq 0.54M \cdots ①$$

また $A2A4 = \dfrac{1}{2} A3A6 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} M = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4} M$





前と同様に 図 3 の AG2 が図 4 の A5G となって表れる。 $A5G = \dfrac{1}{\sqrt{6}} M$

以前と同様に $\Delta A1A2A4 \backsim \Delta GA5A4$ また $A1A6 = \sqrt{7-3\sqrt{5}+2}M = \sqrt{9-3\sqrt{5}}M$

従って $A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \sqrt{9-3\sqrt{5}} : \sqrt{2}$ 従って

$$A4G = \frac{\sqrt{9-3\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} A5G = \frac{\sqrt{9-3\sqrt{5}}}{\sqrt{12}} M = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2} M = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} M = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} M = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} M$$

$$A2G = \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} \right) M = \frac{2\sqrt{2}}{4} M = \frac{\sqrt{2}}{2} M \fallingdotseq 0.71M \cdots ②$$

これが 30 本で正十二面体ができる。

Sec.5　正 20 面体 Marking of Regular Icosahedron

最後の正多面体は正 3 角形が 20 面で構成される。接合部は正 3 角形 5 つが集まる。5 本の部材が頂点に集まる。

Fig 1a

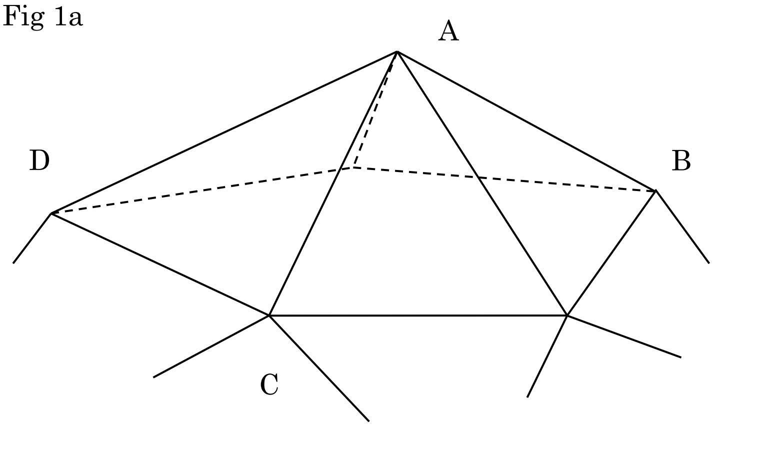
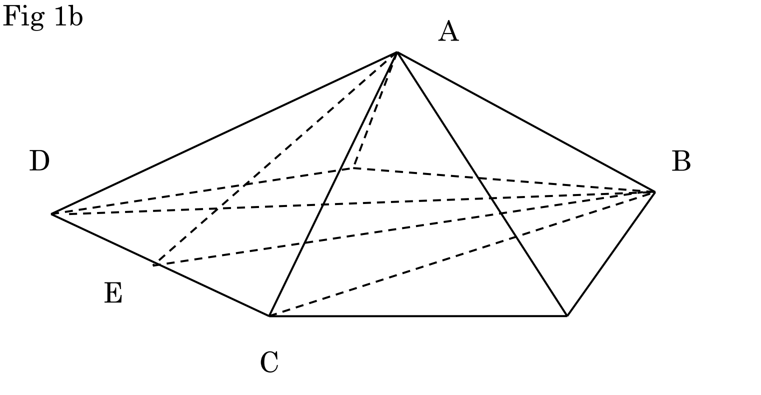


Fig 1b



辺 CD の中点 E を取り、3 角形 ABE を考える。

$$AB = AC = AD = CD = L \qquad BC = DB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}L \qquad CE = DE = \frac{1}{2}L \qquad AE = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$BE = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,L = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-1}{4}}L = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}L$$

Fig 2a

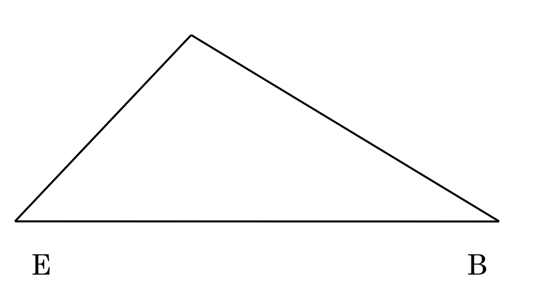
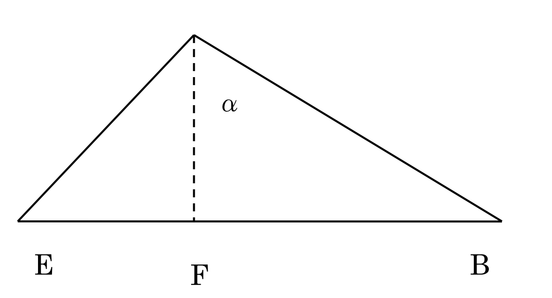


Fig 2b



A から辺 BE に下した垂線の足を F とする。今までの場合と違い、3 角形 BCD は 2 等辺 3 角形なので

点 F は重心ではなく、外心そのものである。少々計算は面倒になる。

$AF = xL \quad BF = yL$ とすると $x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} - y\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ 従って

$1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{4} - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,y = \frac{3}{4} \qquad \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,y = \frac{1}{4} + \frac{5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$y = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \qquad y^2 = \frac{14+6\sqrt{5}}{4\left(5+2\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}{2\times\left(25-20\right)} = \frac{35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

改まって、$y = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$

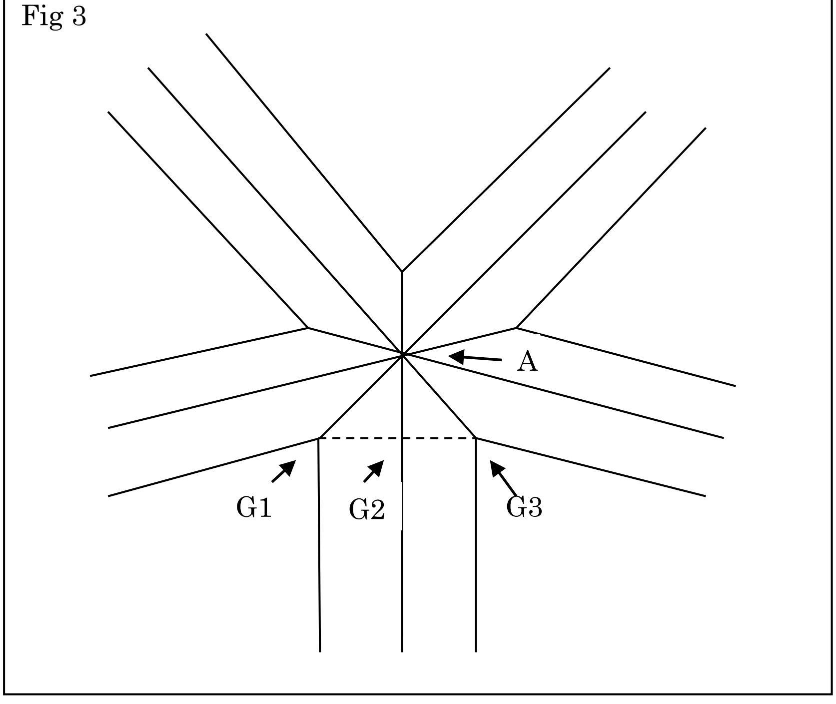
$x^2 = 1 - y^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$

ここで垂直接合角 BAF を α とすると

$\tan^2\alpha = \frac{y^2}{x^2} = \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4} \qquad$ 従って $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

次に点 A の真上から A に接した水平面への投影図を考える。今度は 5 本足のヒトデ型である。

Fig 3



$\angle G1AG3 = 72° = \frac{2\pi}{5} \quad AB \perp G1G3$ であるので水平接合角 $\angle G1AG2 = \frac{\pi}{5}$

$G1G3 = \sqrt{2}M$ であるから $G1G2 = \frac{\sqrt{2}}{2}M$ さらに $\frac{G1G2}{AG2} = \tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ であるので

$AG2 = \frac{G1G2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}M = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\sqrt{25-20}}M = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}M$ が得られる。

次に図 2b の向きから見た角材の投影図を考える。

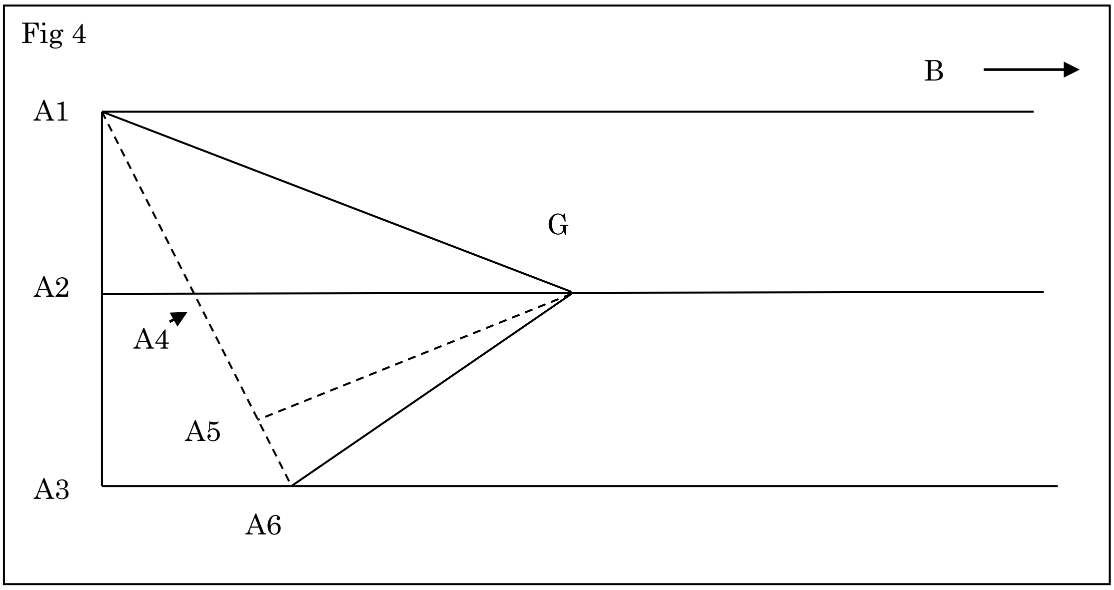


図 3 の点 A の下に点 A4 や点 A5 がある。

図 2b の角 α と同じものが角 BA1A6 となる。　$\angle BA1A6 = \alpha = \angle A1A6A3$

$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \dfrac{A1A3}{A3A6}$　従って

$$A3A6 = \frac{2A1A3}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}M = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}M = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.874M \cdots ①$$

また　$A2A4 = \dfrac{1}{2}A3A6 = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}M$

前と同様に 図 3 の AG2 が図 4 の A5G となって表れる。　$A5G = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}M$

以前と同様に　$\Delta A1A2A4 \backsim \Delta GA5A4$　また　$A1A6 = \sqrt{2+\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}}M = \sqrt{5-\sqrt{5}}M$

従って　$A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \sqrt{5-\sqrt{5}} : \sqrt{2}$　従って

$$A4G = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}A5G = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\sqrt{10}}M = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}}{\sqrt{20}}M = \frac{\sqrt{15+5\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}M$$

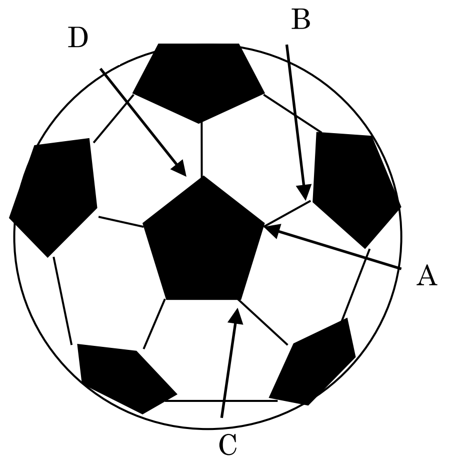
$$= \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}M = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}M$$

$$A2G = A2A4 + A4G = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}\right)M = \frac{\sqrt{10}}{2}M \fallingdotseq 1.581M \cdots ②$$

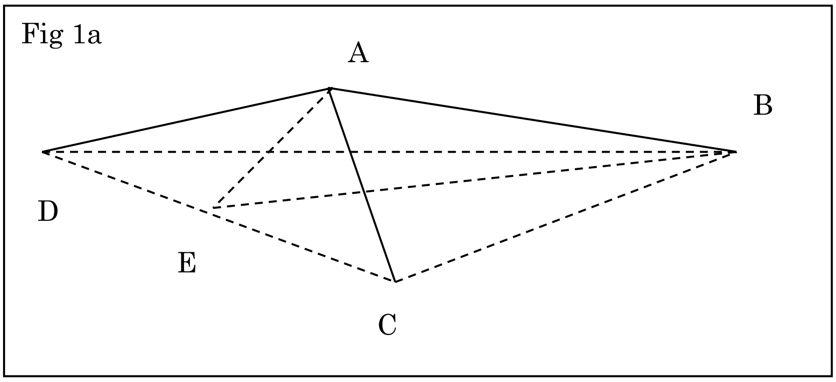
これは 30 本必要となる。これも大変。

ここまで来たら、次はフラーレン、昔のサッカーボール、C60 に取り組みます。

Sec.6　フラーレン Marking of Fullerene

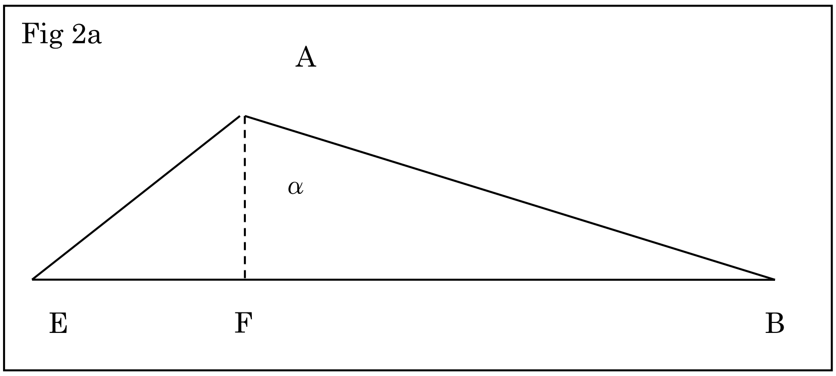


昔のサッカーボール。切頂 20 面体というそうで、辺の長さが共通の正 5 角形 12 枚と正 6 角形 20 枚からなる。60 個の頂点に正 5 角形 1 枚と正 6 角形 2 枚が集まっている。
部材は 2 種類､2 つの正 6 角形に挟まれる部材 P が 30 本と正 6 角形と正 5 角形に挟まれる部材 Q が 60 本で計 90 本。



3 角形 ABC と 3 角形 ABD は正 6 角形の一部、3 角形 ACD は正 5 角形の一部。辺 AB が部材 P で辺 AD と AC が部材 Q である。

$$AB = AC = AD = L \qquad BC = DB = \sqrt{3}L \qquad CD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}L \qquad CE = DE = \frac{\sqrt{5}+1}{4}L$$



$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}}L = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}L$$

$$BE=\sqrt{BC^2-CE^2}=\sqrt{3-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}L=\frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{4}L=\frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}L$$

正多角形では AF は BE と直交するのが当然だったが、今回はそうではない。そもそも点 A から 3 角形 BCD に垂直に下した直線は立体全体の重心を通る保証はない。正 5 角形の重心から正 5 角形に垂直に下した直線や正 6 角形の重心から正 6 角形に垂直に下した直線なら立体全体の重心を通る。しかし、3 本の部材をつなぐときには BE に対して垂直な直線をとるのが計算が簡単であるのでここではそうする。
図 2a では部材 P(辺 AB)について考える。
点 F は 3 角形 BCD の外心とする。正 20 面体と同様に計算は少々面倒である。

$AF=xL\quad BF=yL$ とすると $x^2+y^2=1\quad x^2+\left(\frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{4}-y\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$ 従って

$$1+\frac{42-2\sqrt{5}}{16}-\frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{2}y=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}\qquad\frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{2}y=1+\frac{21-\sqrt{5}}{8}-\frac{5-\sqrt{5}}{8}=3$$

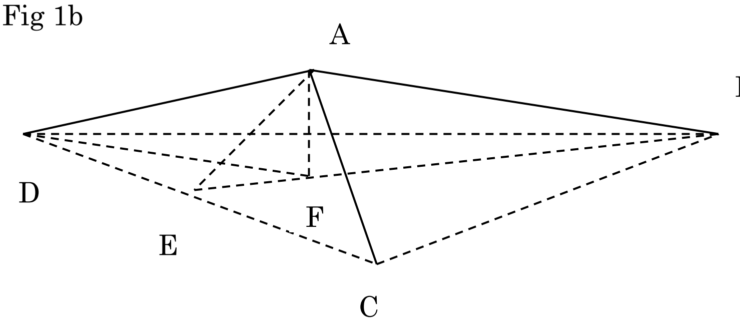
$$y=\frac{6}{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}\qquad y^2=\frac{36}{42-2\sqrt{5}}=\frac{18}{21-\sqrt{5}}=\frac{18\left(21+\sqrt{5}\right)}{436}=\frac{189+9\sqrt{5}}{218}$$

$x^2=1-y^2=\frac{29-9\sqrt{5}}{218}$ ここで垂直接合角 BAF を α とすると

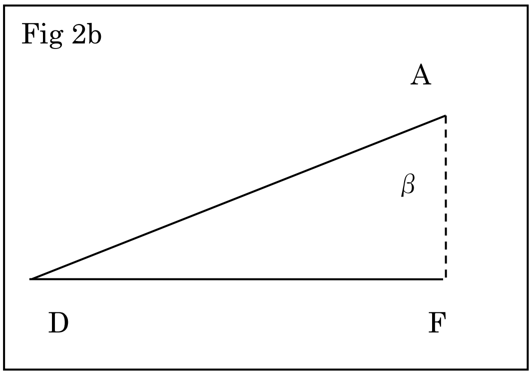
$$\tan^2\alpha=\frac{y^2}{x^2}=\frac{189+9\sqrt{5}}{29-9\sqrt{5}}=\frac{9\left(21+\sqrt{5}\right)\left(29+9\sqrt{5}\right)}{436}=\frac{9\left(609+21\times9\sqrt{5}+29\sqrt{5}+45\right)}{4\times109}=\frac{9\left(654+218\sqrt{5}\right)}{4\times109}$$
$$=\frac{9\left(6+2\sqrt{5}\right)}{4}=\left(\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}\right)^2$$

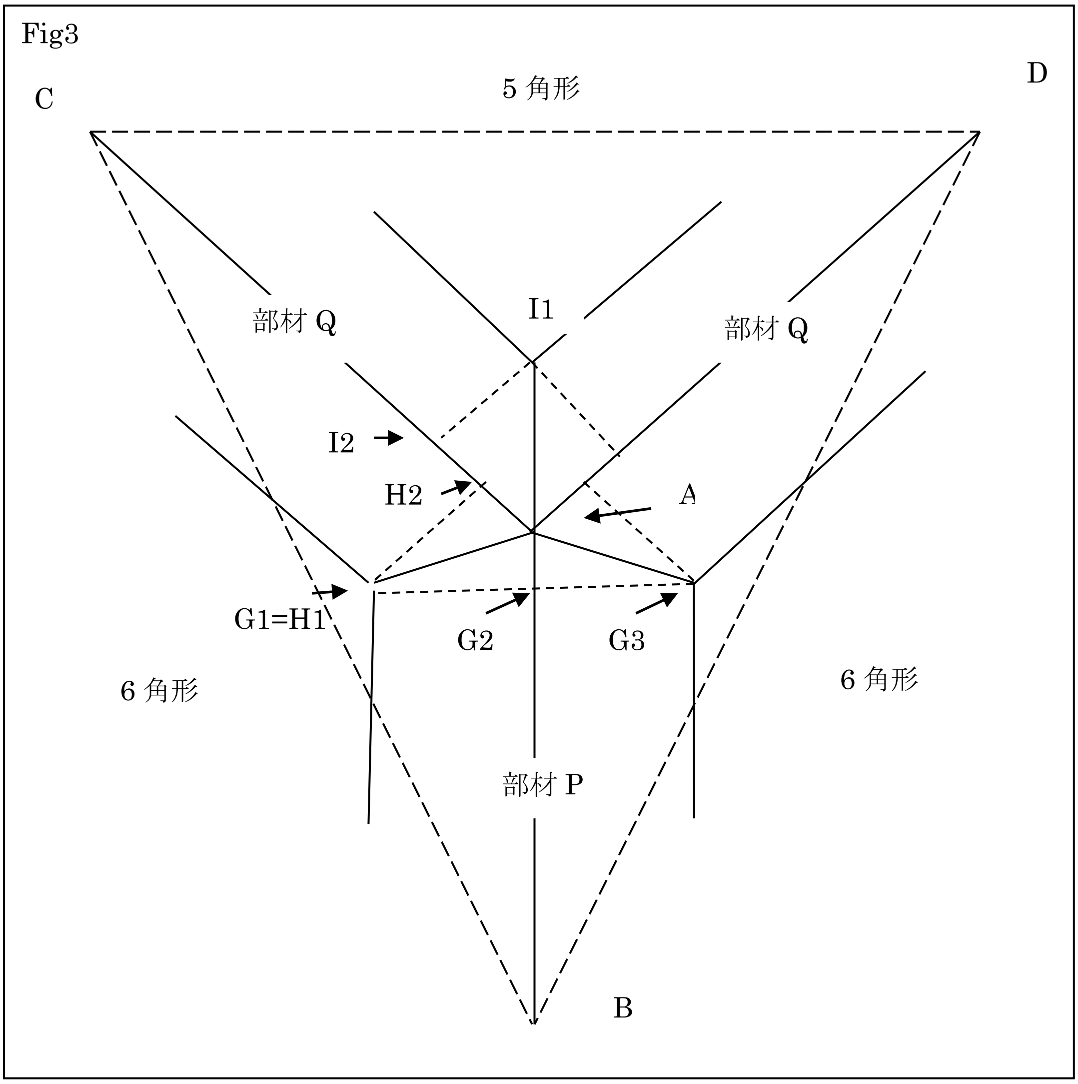
従って $\tan\alpha=\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$ つまり、部材 P の垂直接合角 α は $\tan^{-1}\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}\fallingdotseq 78.4°$
次に部材 Q について考える。図 1a に代わり次の図 1b と 2b を考える。

Fig 1b



部材 Q の垂直接合角は角 DAF すなわち β となる。しかし、点 F は 3 角形 BCD の外心なので BF=DF であるから 3 角形 ADF と先の 3 角形 ABF は合同なので、$\beta=\alpha$ となる。従って部材 P と Q の垂直接合角は等しい。次に接合深さを調べる。
図 3 で本来は点 B と C と D はもっと遠くにあるのだが、近くにあるように書いた。





$$AB = AC = AD = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{21-\sqrt{5}}}L \qquad BC = DB = \sqrt{3}L \qquad CD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}L$$

部材 P の水平接合角は角 G2AG3(=θ1 とする)だがこれは角 BAD の 2 分の 1 である。

部材 Q の水平接合角は 6 角形側は部材 P と同じで、5 角形側は角 CAD の 2 分の 1 即ち角 CAI1(=θ2 とする)である。

3 角形 ABD や ACD は 2 等辺 3 角形なので、その半分の 3 角形は直角 3 角形となり計算は楽である。

点 A から辺 BD に下した足を J とすると、

$$AJ=\sqrt{AB^2-BJ^2}=\sqrt{\frac{18}{21-\sqrt{5}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{18}{21-\sqrt{5}}-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{18(21+\sqrt{5})}{436}-\frac{3\times109}{4\times109}}$$

$$=\sqrt{\frac{51+18\sqrt{5}}{4\times109}}=\sqrt{\frac{3(17+6\sqrt{5})}{4\times109}}$$

従って　$\tan\theta 1=\dfrac{BJ}{AJ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\dfrac{4\times109}{3(17+6\sqrt{5})}}=\sqrt{\dfrac{109}{17+6\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{109(17-6\sqrt{5})}{109}}=\sqrt{17-6\sqrt{5}}$

従って部材 P の両側と部材 Q の 6 角形側の接合深さ t1 は

$$t1=\frac{M}{\sqrt{2}\tan\theta 1}=\frac{M}{\sqrt{2(17-6\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{17+6\sqrt{5}}{2\times109}}M$$

点 A から辺 CD に下した足を K とすると、

$$AK=\sqrt{AC^2-CK^2}=\sqrt{\frac{36}{42-2\sqrt{5}}-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{18}{21-\sqrt{5}}-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{18(21+\sqrt{5})}{436}-\frac{(3+\sqrt{5})\times109}{8\times109}}=\sqrt{\frac{429-73\sqrt{5}}{8\times109}}$$

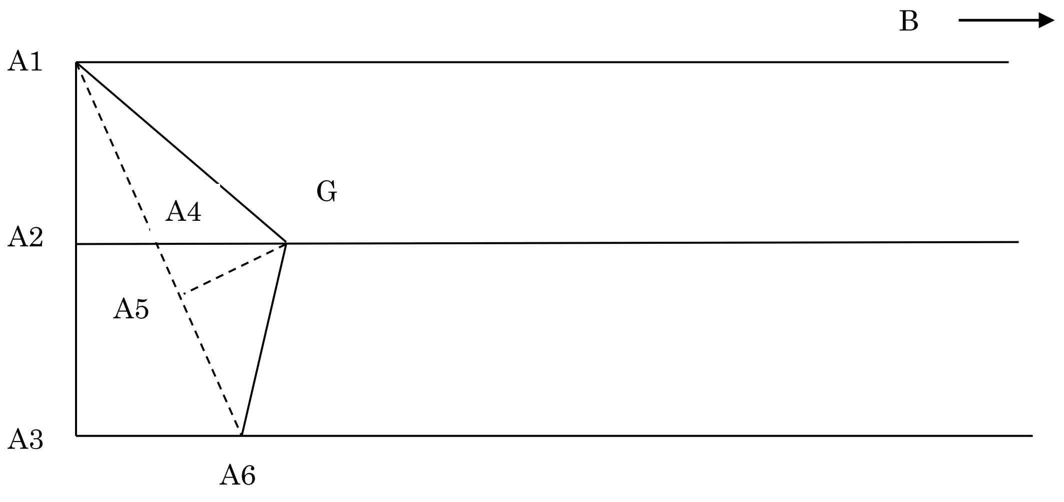
従って　$\tan\theta 2=\dfrac{CK}{AK}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\times\sqrt{\dfrac{8\times109}{429-73\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{\dfrac{109}{429-73\sqrt{5}}}$

従って部材 Q の 5 角形側の接合深さ t2 は

$$t2=\frac{M}{\sqrt{2}\tan\theta 2}=\frac{M}{(\sqrt{5}+1)}\times\sqrt{\frac{429-73\sqrt{5}}{109}}$$

部材 P の両側と部材 Q の 6 角形側の墨出しは次のようになる。

Fig 4a



$$\angle BA1A6=\alpha=\angle A1A6A3$$

$$\tan\alpha = \frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} = \frac{A1A3}{A3A6}$$ 従って

$$A3A6 = \frac{2A1A3}{3\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{5}+1\right)}M = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{3\times 4}M = \frac{\sqrt{5}-1}{3\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{6}M \fallingdotseq 0.2913M \cdots ①$$

また $A2A4 = \frac{1}{2}A3A6 = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12}M$

前と同様に 図 3 の AG2 が図 4a の A5G となって表れる。 $A5G = t1 = \sqrt{\frac{17+6\sqrt{5}}{2\times 109}}M$

以前と同様に $\Delta A1A2A4 \backsim \Delta GA5A4$ また

$$A1A6 = \sqrt{A1A3^2 + A3A6^2} = \sqrt{2+\frac{12-2\sqrt{20}}{36}}M = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3}M$$

従って $A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3} : \sqrt{2}$

$$A4G = \sqrt{\frac{17+6\sqrt{5}}{2\times 109}}\frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{17+6\sqrt{5}}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{6\sqrt{109}}M$$

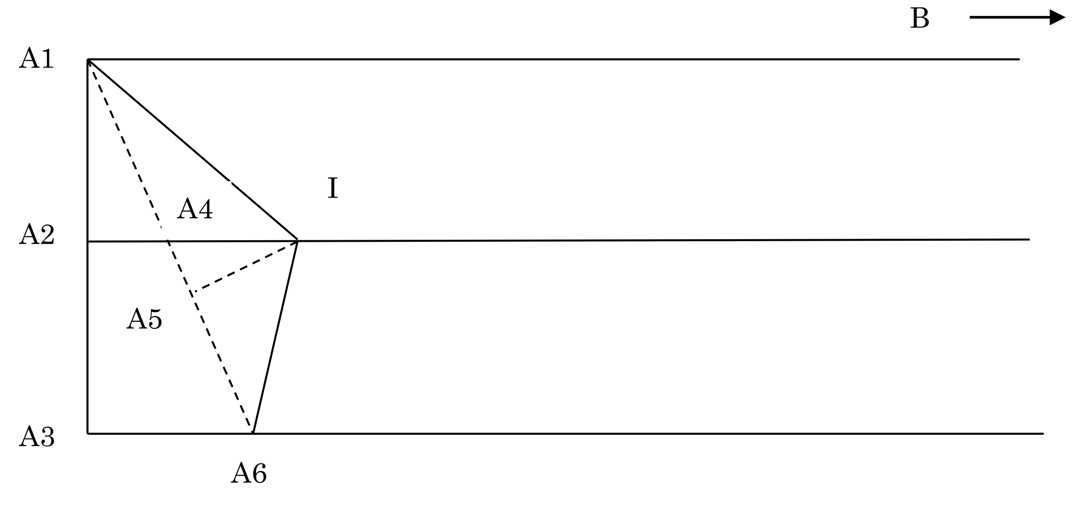
$$A2G = A2A4 + A4G = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{17+6\sqrt{5}}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{6\sqrt{109}}\right)M \fallingdotseq 0.5270M \cdots ②$$

この①と②で部材 P を 30 本作る。また 60 本の部材 Q の 6 角形側を同様に墨出しする。
次に部材 Q の 5 角形側の墨出しを行う。

$A3A6 = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{6}M \fallingdotseq 0.2913M \cdots ①$ $A2A4 = \frac{1}{2}A3A6 = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12}M$ $A1A6 = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3}M$

は部材 P と同一。垂直接合角は共通だからである。

Fig 4b



今度は 図 3 の AI2 が図 4b の A5I となって表れる。 $A5I = t2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}+1}\sqrt{\dfrac{429-73\sqrt{5}}{2\times 109}}M$

以前と同様に $\Delta A1A2A4 \backsim \Delta IA5A4$ 従って

$$A4I : A5I = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3} : \sqrt{2}$$

$$A4I = \frac{1}{\sqrt{5}+1}\sqrt{\frac{429-73\sqrt{5}}{109}}\frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{429-73\sqrt{5}}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3\sqrt{2}\sqrt{109}\left(\sqrt{5}+1\right)}M$$

$$A2I = A2A4 + A4I = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{429-73\sqrt{5}}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3\sqrt{2}\sqrt{109}\left(\sqrt{5}+1\right)}\right)M \fallingdotseq 0.6383M \cdots ③$$

上記の①と③で部材 Q の 5 角形側を加工する。
本校の建築科の生徒に作ってもらう予定である。

Sec.7　まとめ(その 1)　Conclusion1

垂直接合角 α 、水平接合角 θ 、接合深さ t の関係は次の通り。

$$t=\frac{M}{\sqrt{2}\tan\theta}$$

部材下部長 x は　$x=\dfrac{\sqrt{2}M}{\tan\alpha}$

部材側部長 y は　$y=\dfrac{1}{2}x+l=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{t}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha\tan\theta}\right)M$

しかし、この式を見ただけでは多面体の特異な数値は浮かび上がらない。なにがしかの共通な数値の美しさを感じた。特に、フラーレンの計算の途中に 109 という素数が頻繁に出てくる。それの根号を用いた「因数分解」が 3 通り表れていた。

$$109=\left(17-6\sqrt{5}\right)\left(17+6\sqrt{5}\right)=\left(\frac{21-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{21+\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{429-73\sqrt{5}}{2\times19}\right)\left(\frac{429+73\sqrt{5}}{2\times19}\right)$$

似たものは人為的にいくらでも作ることができる。例えば上の $21+\sqrt{5}$ と $17+6\sqrt{5}$ の「差」である $5\sqrt{5}+4$ でも $109=\left(5\sqrt{5}-4\right)\left(5\sqrt{5}+4\right)$ と「因数分解」できる。しかし、この値はフラーレンの計算には出てこない。上記の数値は自然界のなんらかの特徴を表していると思わざるを得ない。

この話が行き着く先は多分ガロア数体 $Q\left(\sqrt{5}\right)$ についての類体論だろう。

多面体を構成する部材の墨付け寸法　　　　　M は角材切り口の 1 辺の長さ

対象と構成	下部長	側部長
正 4 面体 正 3 角形 4 面 部材 6 本	$2M$	$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)M\fallingdotseq1.71M$
正 6 面体 正方形 6 面 部材 12 本	M	M
正 8 面体 正 3 角形 8 面 部材 12 本	$\sqrt{2}M$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)M\fallingdotseq1.71M$
正 12 面体 正 5 角形 12 面 部材 30 本	$\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}M\fallingdotseq0.54M$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}M\fallingdotseq0.71M$
正 20 面体 正 3 角形 20 面 部材 30 本	$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}M\fallingdotseq0.874M$	$\dfrac{\sqrt{10}}{2}M\fallingdotseq1.581M$

不等辺 3 角錐(頭頂部) 側面 2:2:1 底面 1:1:1 底部については本文参照	$\sqrt{22}M \fallingdotseq 4.69M$	$\left(\frac{\sqrt{22}}{2}+\sqrt{2}\right)M \fallingdotseq 3.76M$
フラーレン 正 5 角形 12 面 (正)6 角形 20 面 部材 P(6 角形と 6 角形の間)30 本 部材 Q(6 角形と 5 角形の間)60 本	$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{6}M \fallingdotseq 0.291M$	部材 P 両側と部材 Q 6 角形側 $\left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{17+6\sqrt{5}}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{6\sqrt{109}}\right)M$ $\fallingdotseq 0.527M$ 部材 Q 5 角形側 $\left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{429-73\sqrt{5}}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3\sqrt{2}\sqrt{109}\left(\sqrt{5}+1\right)}\right)M$ $\fallingdotseq 0.638M$

この表を作って気付きましたがフラーレンの下部長と正 12 面体の下部長が等しく、あるいは近い数値になるべきかと思います。どちらか又は両方が間違えている可能性があります。勘違いでしょうか。どなたか検算をして頂けないでしょうか。

検算よりも作ってみるのが早いかもしれません。実際に作ったのは 4 面体、8 面体の半分、不等辺 3 角錐です。まだまだ修行が足りません。今夏挑戦します。

Continued.

板材による製作　Made of Plate

Sec.8　　正 4 面体 Regular Tetrahedron

各辺の長さが L、角材の断面は正方形としてその 1 辺の長さは M とする。正 4 面体 ABCD を角材の外側の稜線の形として考える。

Fig 1a

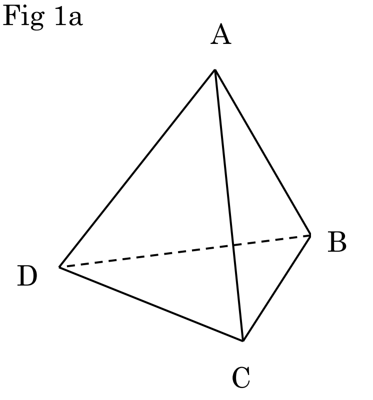
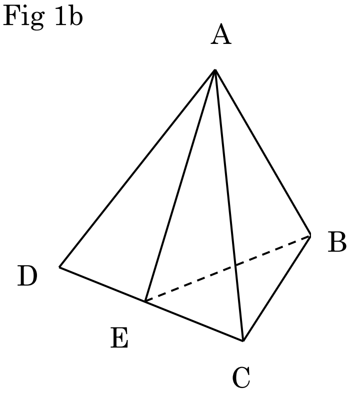
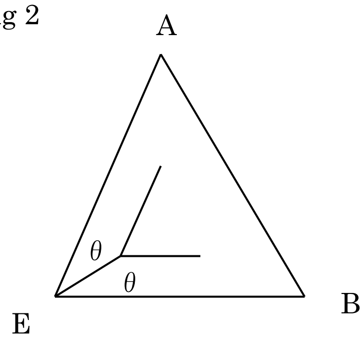


Fig 1b



辺 CD の中点を E とし、断面の三角形 ABE を考える。ここまでは角材の場合と同様。

Fig 2



今度は板で作るので、角材よりもはるかに簡単である。同じ大きさの正三角形の板の縁を角 AEB の半分の角度 θ ですべて斜めに切り落とすか削るかする。以後、この角度 θ を**面接合角(Plate Joint Angle)**と呼ぶ。

$AB = L \quad AE = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ 　である。$\angle AEB = 2\theta$ とし、$\tan\theta$ を求める。

余弦定理より　$$\cos 2\theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

半角公式より　$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ 　であるので、

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.707$$

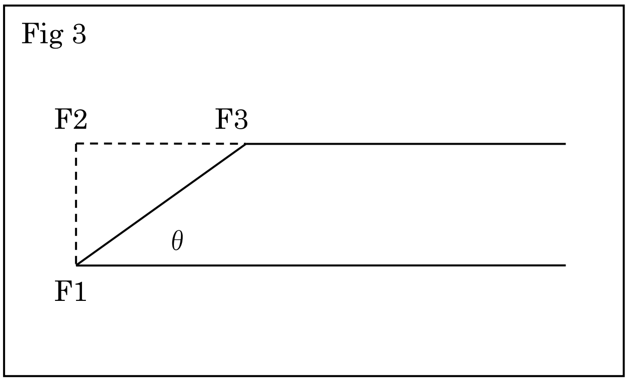


Fig 3

図 3 で F1F2 が板の厚さで既定であり、そのときの F2F3 の長さが問題になるので、$\tan\theta$ よりはその逆数を求めておいたほうがよい。$\dfrac{1}{\tan\theta} = \sqrt{2}$ であるので、F2F3 を板の厚さの 1.41 倍にすればよい。

角材で作る場合は、接合部のみを切り落とせばよいが、板の場合は縁の全部をこの角度で切り落とすか削っておかなくてはならない。手作業ではかなり大変である。

不等辺正 3 角錐ではどうなるか。先と同様に、底辺は 1 辺 L の正 3 角形、側面は各辺が kL　kL　L の 2 等辺 3 角形のものを考える。

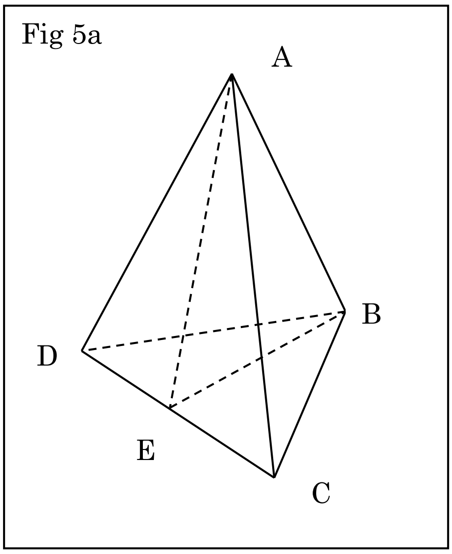


Fig 5a

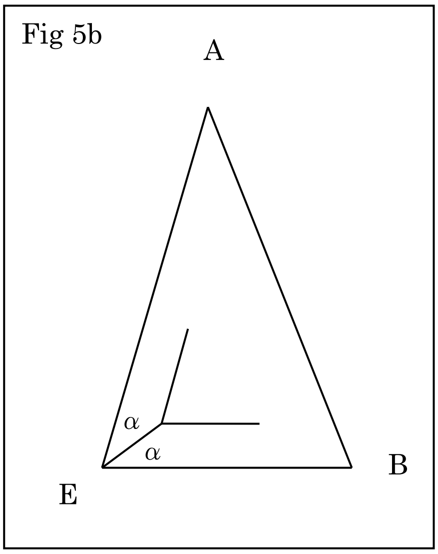


Fig 5b

図 5a で $AB = AC = AD = kL \quad BC = CD = DB = L$ とする。辺 CD の中点を E とする。
側面の板材①と底面の板材②のなす角を図 5b のように定め、$\tan\alpha$ を求める。面接合角はαとβの 2 種類ある。

図 5b で $AE = \sqrt{(kL)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4k^2-1}{4}}L = \frac{\sqrt{4k^2-1}}{2}L \qquad BE = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ である。

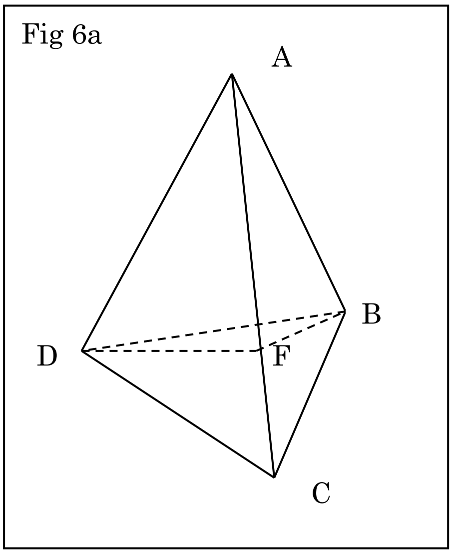
余弦定理より $\cos 2\alpha = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{4k^2-1}}{2}\right)^2 - k^2}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{4k^2-1}}{2}} = \dfrac{\dfrac{3}{4}+\dfrac{4k^2-1}{4}-k^2}{\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}}$

半角公式より $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}+1}{2\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}}$ $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}-1}{2\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}}$

従って $\tan^2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}-1}{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}+1} = \dfrac{\left(\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}-1\right)^2}{3\left(4k^2-1\right)-1} = \dfrac{\left(\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}-1\right)^2}{12k^2-4}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}-1}{2\sqrt{3k^2-1}}$ 更に $\dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{2\sqrt{3k^2-1}}{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}-1}$ ・・・①

次に板材①どうしの接合を考える。



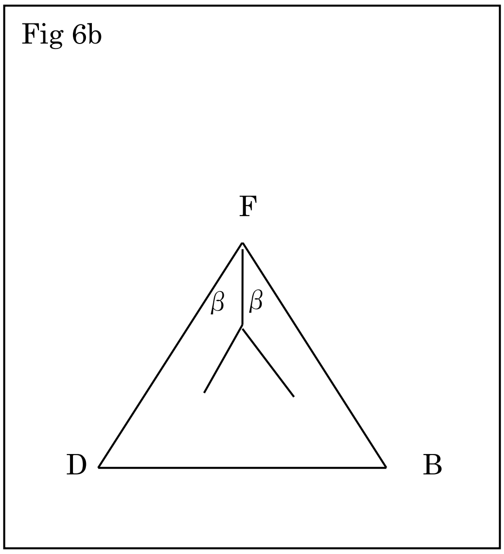


図 6a で $AB = AC = AD = kL$ $BC = CD = DB = L$ とする。辺 AC に点 D から下した垂線の足を F とする。図 6b で側面の板材①どうしのなす角を図のように定め、$\tan\beta$ を求める。三角形 ABC の面積について次の式が成り立つ。

$\Delta ABC = \dfrac{1}{2}\times BC\times\sqrt{(kL)^2-\left(\dfrac{L}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\times kL\times BF$ 従って $BF = \dfrac{\sqrt{4k^2-1}}{2k}L$

余弦定理より $\cos 2\beta = \dfrac{2\times\left(\dfrac{\sqrt{4k^2-1}}{2k}\right)^2-1}{2\times\left(\dfrac{\sqrt{4k^2-1}}{2k}\right)^2} = \dfrac{2\times\left(1-\dfrac{1}{4k^2}\right)-1}{2\times\left(1-\dfrac{1}{4k^2}\right)} = \dfrac{1-\dfrac{1}{2k^2}}{2-\dfrac{1}{2k^2}} = \dfrac{2k^2-1}{4k^2-1}$

半角公式より　$\cos^2\beta = \dfrac{1+\cos 2\beta}{2} = \dfrac{1+\dfrac{2k^2-1}{4k^2-1}}{2} = \dfrac{4k^2-1+2k^2-1}{2(4k^2-1)} = \dfrac{3k^2-1}{4k^2-1}$

$\sin^2\beta = \dfrac{1-\cos 2\beta}{2} = \dfrac{1-\dfrac{2k^2-1}{4k^2-1}}{2} = \dfrac{4k^2-1-2k^2+1}{2(4k^2-1)} = \dfrac{k^2}{4k^2-1}$　　$\tan^2\beta = \dfrac{k^2}{3k^2-1}$

$\tan\beta = \dfrac{k}{\sqrt{3k^2-1}}$　　$\dfrac{1}{\tan\beta} = \dfrac{\sqrt{3k^2-1}}{k}$ ・・・②

①も②も　$k > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の範囲で使える。

$k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ というのは 3 枚の側面が底面に張り付いて体積が 0 になる状態である。

k=2 の場合　$\dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{2\sqrt{3k^2-1}}{\sqrt{3}\sqrt{4k^2-1}-1} = \dfrac{2\sqrt{11}}{3\sqrt{5}-1} \fallingdotseq 1.162$　　$\dfrac{1}{\tan\beta} = \dfrac{\sqrt{3k^2-1}}{k} = \dfrac{\sqrt{11}}{2} \fallingdotseq 1.658$

底面の正三角形の縁は板の厚さの 1.162 倍切り込む。側面の 2 等辺三角形は底辺は 1.162 倍、等辺は 1.658 倍切り込む。

Sec.9　正 6 面体(立方体)　Regular Hexahedron

正 6 面体すなわち立方体を板で作る。面接合角 θ は正 6 面体の場合明らかに 45 度。

$\dfrac{1}{\tan\theta} = 1$　　同じ大きさの正方形の全ての縁を板の厚さと同じだけ切り込む。

別の美しい作り方があるが、この方法では繋ぎ目が見えないのが特徴。

Sec.10　正 8 面体　Regular Octahedron

上半分の正 4 角錘を考える。辺 AD の中点を E とする。断面の 3 角形 EBC を考える。

$AB = AC = AD = L$　$BE = CE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}L$　$BC = \sqrt{2}L$　である。図 2 の様に板を削る角度 θ が決まり、

$\dfrac{1}{\tan\theta}$ を求める。三角形 EBC は 2 等辺 3 角形なので、計算は簡単。

Fig 1a

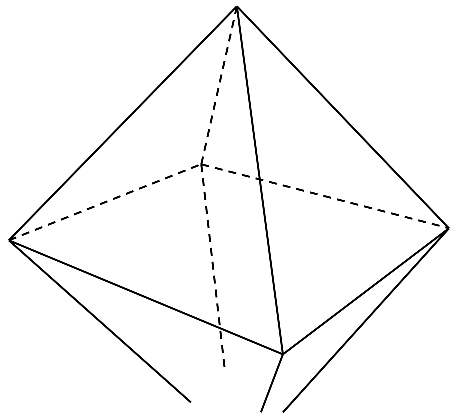


Fig 1b

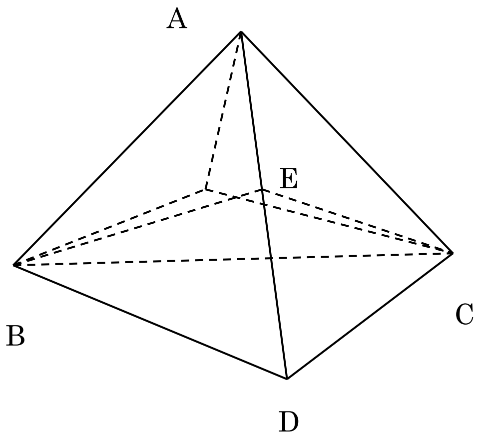
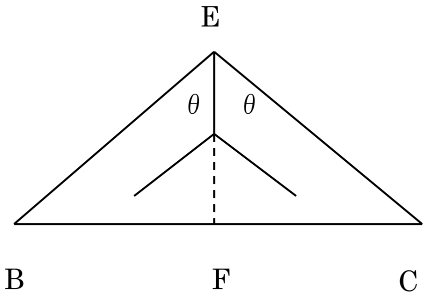


Fig 2



$$CF=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}L \qquad EF=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2}=\frac{L}{2} \qquad \frac{1}{\tan\theta}=\frac{EF}{CF}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 0.707$$

正三角形 8 枚の縁を全て、板の厚さの 0.707 倍切り込む。

さて、角材編と同様に等辺正 4 角錐 Equilateral Regular Quadrangular Pyramid も作ってみる。上記に加えて必要な図は以下の通り。

Fig 3a

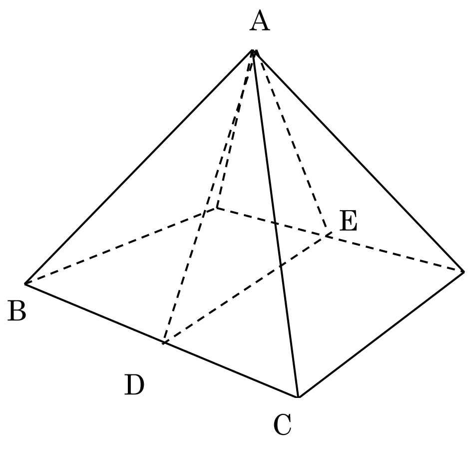
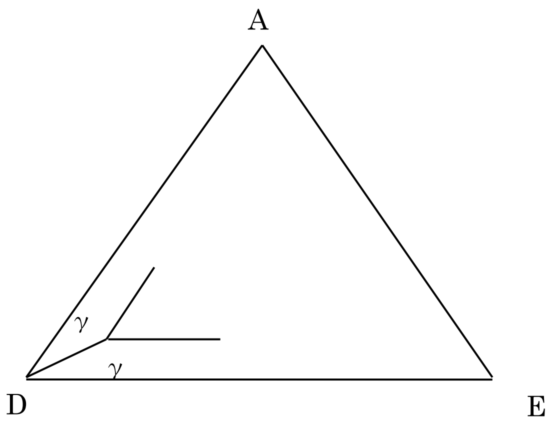


Fig 2



$\angle ADE=2\gamma$　として　$\dfrac{1}{\tan\gamma}$ を求める。これが底面とそれに繋がる正三角形の縁の切り込みを決める。

$AD = AE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}L \qquad DE = L \qquad$ である。余弦定理より

$$\cos 2\gamma = \frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

半角公式より　$\cos^2\gamma = \dfrac{1+\cos 2\gamma}{2} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} \qquad \sin^2\gamma = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

従って　$\tan^2\gamma = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\left(3+\sqrt{3}\right)^2} \qquad \tan\gamma = \dfrac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{\tan\gamma} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 1.932$$

これが底面のすべての縁と、側面の下側の縁の切り込みである。

Sec.11　正 12 面体　Regular Dodecahedron

正 12 面体は正 5 角形 12 面でできている。角材の場合は正 4 面体や正 6 面体と同様な手を使えたが、板材の場合は接合角を取り出す断面を描くのが多少難しい。

Fig 1a

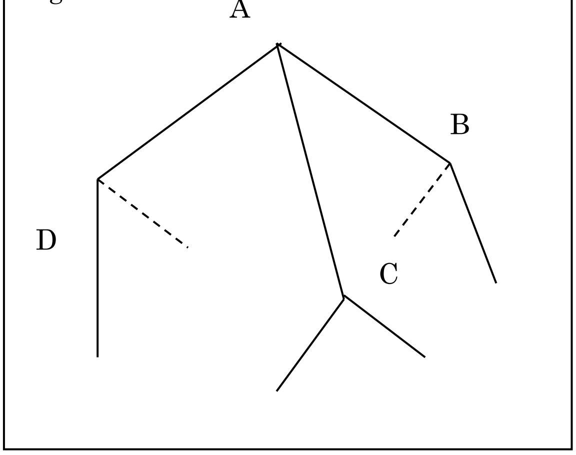
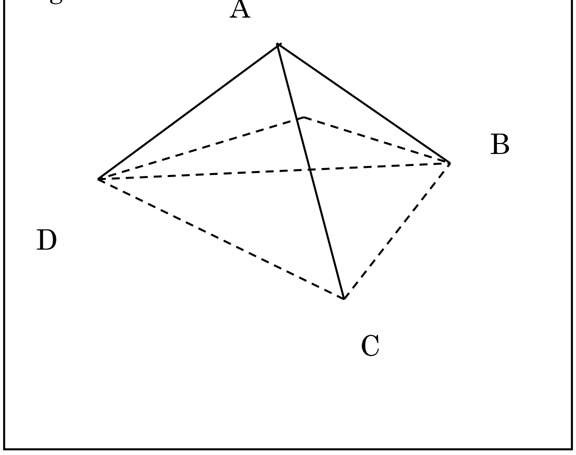


Fig 1b



しかし、同様の状況は既に計算済である。Sec.8 の不等辺正三角錐の $\dfrac{1}{\tan\beta}$ がそのまま使える。Sec.8 では $\dfrac{AC}{BC} = k$ であったが今の場合は $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるので $k = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ を用いればよい。従って

$$\frac{1}{\tan\beta}=\frac{\sqrt{3k^2-1}}{k}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\times 3-1}}{2}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}\sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}}{4}}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{7-3\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\fallingdotseq 0.618$$

同じ大きさの 12 枚の正五角形のすべての縁を板厚の 0.618 倍切り込む。

Sec.12　正 20 面体 Regular Icosahedron

最後の正多面体は正 3 角形が 20 面で構成される。接合部は正 3 角形 5 つが集まる。

Fig 1a

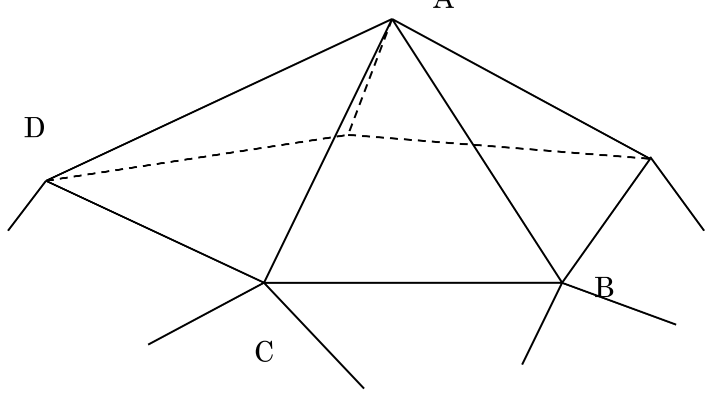
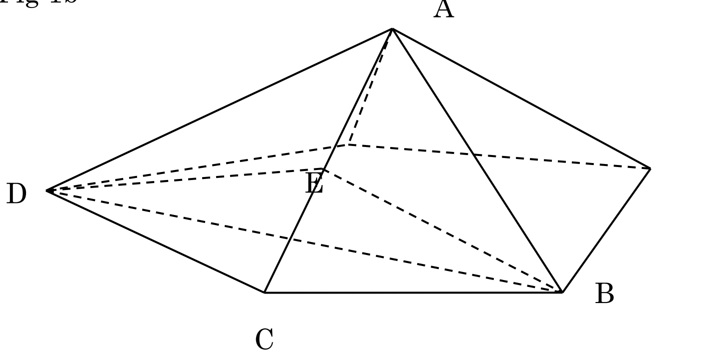


Fig 1b



辺 AC の中点 E を取り、3 角形 EBD を考える。

Fig 2

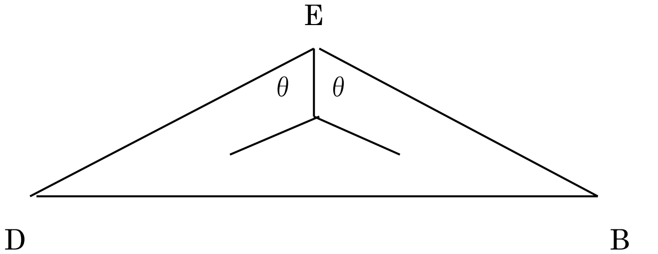


図 2 で　$AB = AC = AD = CD = BC = L$　　$BD = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}L$　　$EB = ED = \dfrac{\sqrt{3}}{2}L$　である。θ が面接合角である。$\dfrac{1}{\tan\theta}$ を求める。余弦定理より

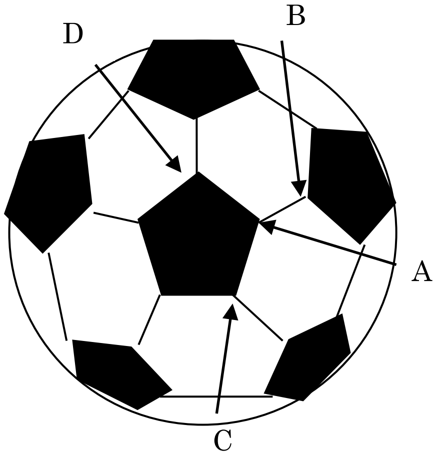
$$\cos 2\theta = \frac{2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2}{2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3-3-\sqrt{5}}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{6} \qquad \sin^2\theta = \frac{3+\sqrt{5}}{6} \qquad \tan^2\theta = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{4}{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$$

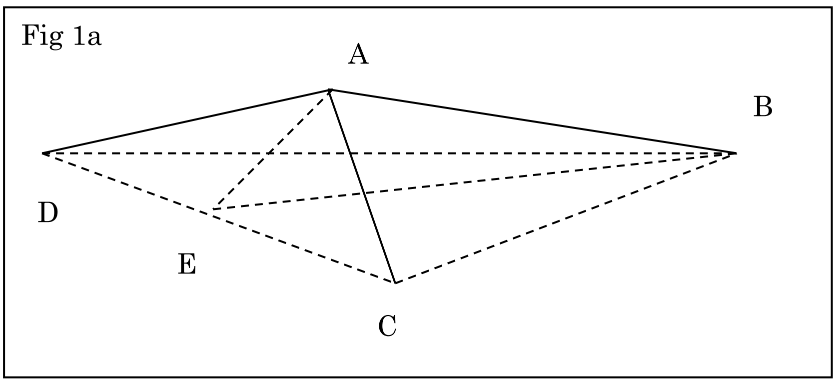
$$\tan\theta = \frac{2}{3-\sqrt{5}} \qquad \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 0.382$$

20 枚の同じ大きさの正三角形の全ての縁を板厚の 0.38 倍切り込む。

Sec.13　フラーレン Equilateral Fullerene

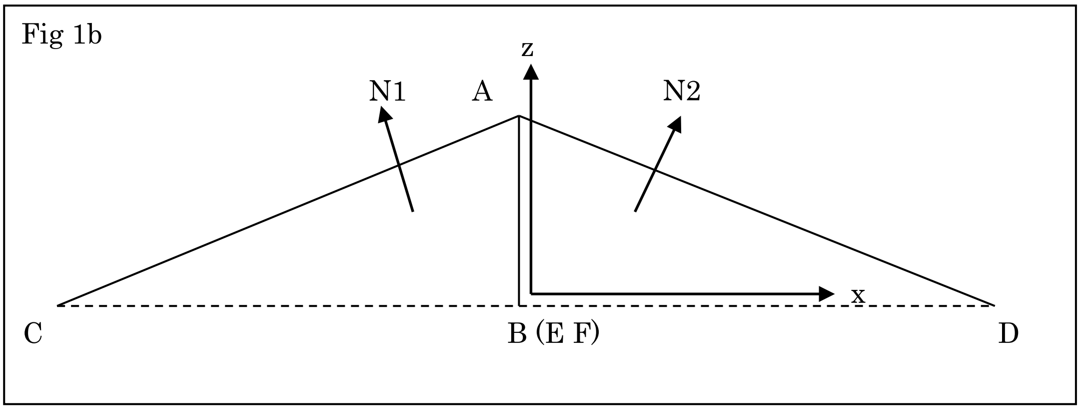


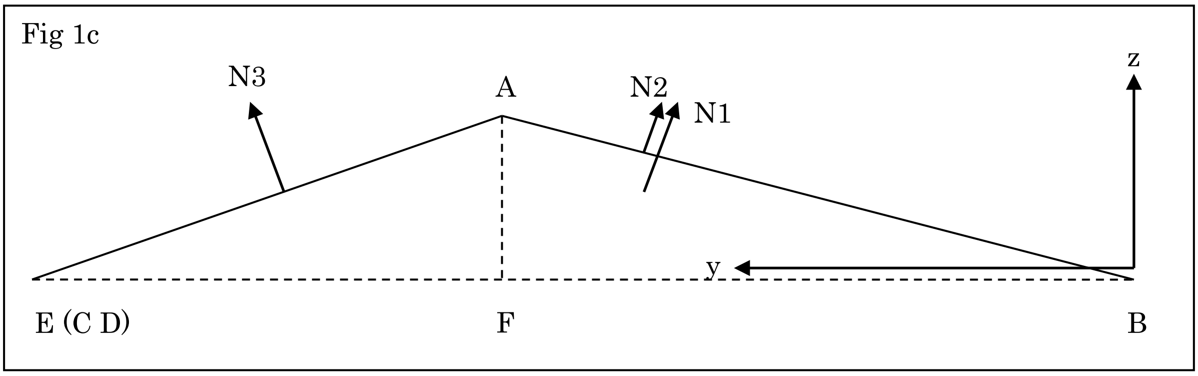
辺の長さが共通の正 5 角形 12 枚と正 6 角形 20 枚からなる。3 角錐 ABCD を考える。



3 角形 ABC と 3 角形 ABD は正 6 角形の一部、3 角形 ACD は正 5 角形の一部。図 1b はこの 3 角錐を

B の方向から見たもの。図 1c は 3 角形 AEB を真横(C の方向)から見たもの。点 B を原点として座標軸を決める。各面どうしのなす角を求めたいのだが、その角を含む断面を描くのは難しいので、ベクトルを用いてその角を求める。3 角形 ABC、ABD、ACD の面の法線ベクトルをそれぞれ N1、N2、N3 とする。





まず各辺の実寸は Sec.6 と同様である。 $AB = AC = AD = L$ $BC = DB = \sqrt{3}L$

$$CD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}L \qquad CE = DE = \frac{\sqrt{5}+1}{4}L \qquad AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}}L = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}L$$

$$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{3 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}}L = \frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{4}L = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}L$$

$$AF = \sqrt{\frac{29-9\sqrt{5}}{218}}L \qquad BF = \sqrt{\frac{189+9\sqrt{5}}{218}}L$$

これらが各面に投影されているので、図 1b と 1c の上では異なるものが多いことに注意する。
まず N1 の成分を求めるために 3 角形 ABC を張るベクトルを求める。上記の式から L はすべて外しても問題ないのでそうする。

$\vec{N}1 = (a, b, c)$ とする。$\vec{BC} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ $\vec{BA} = \left(0, \sqrt{\frac{189+9\sqrt{5}}{218}}, \sqrt{\frac{29-9\sqrt{5}}{218}}\right)$

$\vec{BC}$ は 4 倍しておく。$\vec{BC} = \left(-(\sqrt{5}+1), \sqrt{42-2\sqrt{5}}, 0\right)$

$\vec{BA}$ は $\sqrt{218}$ 倍しておく。$\vec{BA}=\left(0,\sqrt{189+9\sqrt{5}},\sqrt{29-9\sqrt{5}}\right)$

$\vec{N}1\perp\vec{BC}$ なので $-a\left(\sqrt{5}+1\right)+b\sqrt{42-2\sqrt{5}}=0$ ・・・①

$\vec{N}1\perp\vec{BA}$ なので $b\sqrt{189+9\sqrt{5}}+c\sqrt{29-9\sqrt{5}}=0$ ・・・②

$b=-1$ とすると①より $a=-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ ②より $c=\dfrac{\sqrt{189+9\sqrt{5}}}{\sqrt{29-9\sqrt{5}}}$

従って $\vec{N}1=\left(-\dfrac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1},-1,\dfrac{\sqrt{189+9\sqrt{5}}}{\sqrt{29-9\sqrt{5}}}\right)$ $\vec{N}2$ は $\vec{N}1$ と x 軸方向について対称であるから

$\vec{N}2=\left(\dfrac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1},-1,\dfrac{\sqrt{189+9\sqrt{5}}}{\sqrt{29-9\sqrt{5}}}\right)$ と求まる。3 角形 ABC と ABD の面接合角を α とすると

$$\cos(\pi-2\alpha)=\frac{\vec{N}1\cdot\vec{N}2}{\left|\vec{N}1\right|\times\left|\vec{N}2\right|}=\frac{-\dfrac{42-2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}+1+\dfrac{189+9\sqrt{5}}{29-9\sqrt{5}}}{\dfrac{42-2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}+1+\dfrac{189+9\sqrt{5}}{29-9\sqrt{5}}}=\frac{-17+6\sqrt{5}+1+\dfrac{27+9\sqrt{5}}{2}}{17-6\sqrt{5}+1+\dfrac{27+9\sqrt{5}}{2}}=\frac{-5+21\sqrt{5}}{63-3\sqrt{5}}$$

$\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha$ であるから $\cos 2\alpha=\dfrac{5-21\sqrt{5}}{63-3\sqrt{5}}$

半角公式より $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}=\dfrac{34-12\sqrt{5}}{3\left(21-\sqrt{5}\right)}$ $\sin^2\alpha=\dfrac{29+9\sqrt{5}}{3\left(21-\sqrt{5}\right)}$

$\dfrac{1}{\tan^2\alpha}=\dfrac{34-12\sqrt{5}}{29+9\sqrt{5}}=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ $\dfrac{1}{\tan\alpha}=\sqrt{\dfrac{14-6\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{14-2\sqrt{45}}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 0.382$

これが正 6 角形どうしの辺の面取り寸法である。
次に正 5 角形と正 6 角形の間の辺について考える。

$\vec{N}3=(d,e,f)$ とする。$\vec{CD}=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},0,0\right)$

$$\vec{AD}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},BE-BF,-\sqrt{\frac{29-9\sqrt{5}}{218}}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{189+9\sqrt{5}}{218}},-\sqrt{\frac{29-9\sqrt{5}}{218}}\right)$$

$\vec{N}3\perp\vec{CD}$ より $d=0$ はすぐにわかる。

$\vec{N}3\perp\vec{AD}$ であるので $e\left(\dfrac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}-\sqrt{\dfrac{189+9\sqrt{5}}{218}}\right)-f\sqrt{\dfrac{29-9\sqrt{5}}{218}}=0$

$e=1$ とすると $f=\dfrac{\dfrac{\sqrt{109}}{2}\sqrt{21-\sqrt{5}}-\sqrt{189+9\sqrt{5}}}{\sqrt{29-9\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{109}\sqrt{21-\sqrt{5}}-6\sqrt{21+\sqrt{5}}}{2\sqrt{29-9\sqrt{5}}}$

$\vec{N}3=\left(0,1,\dfrac{\sqrt{109}\sqrt{21-\sqrt{5}}-6\sqrt{21+\sqrt{5}}}{2\sqrt{29-9\sqrt{5}}}\right)$ が求まる。3 角形 ACD と ABC の面接合角を β とする。

$$\cos(\pi-2\beta)=\frac{\vec{N}1\cdot\vec{N}3}{\left|\vec{N}1\right|\times\left|\vec{N}3\right|}$$

$$=\frac{-1+\dfrac{3\sqrt{109}\sqrt{436}-18\left(21+\sqrt{5}\right)}{2\left(29-9\sqrt{5}\right)}}{\sqrt{\dfrac{42-2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}+1+\dfrac{9\left(21+\sqrt{5}\right)}{29-9\sqrt{5}}}\times\sqrt{1+\dfrac{109\left(21-\sqrt{5}\right)-12\sqrt{109\times436}+36\left(21+\sqrt{5}\right)}{4\left(29-9\sqrt{5}\right)}}}$$

$$=\frac{-2\left(29-9\sqrt{5}\right)+6\times109-18\left(21+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{109\left(7-3\sqrt{5}\right)+29-9\sqrt{5}+9\left(21+\sqrt{5}\right)}\times\sqrt{4\left(29-9\sqrt{5}\right)+109\left(21-\sqrt{5}\right)-24\times109+36\left(21+\sqrt{5}\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

$\cos(\pi-2\beta)=-\cos2\beta$ であるから $\cos2\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}=\dfrac{-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}\sqrt{25-20}}=\dfrac{-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$

半角公式より $\cos^2\beta=\dfrac{1+\cos2\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{15}}$ $\sin^2\beta=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{15}}$

$$\frac{1}{\tan^2\beta}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}=\frac{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)^2}{15-\left(5+2\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)^2}{10-2\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\tan\beta}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\fallingdotseq0.338$$

12 枚の 5 角形のすべての辺と 20 枚の 6 角形の交互の 3 辺はこの値で切り込み、5 角形と繋ぐ。6 角形の残りの 3 辺は先の値で切り込み、6 角形どうしを繋ぐ。これでフラーレンを板で作ることができる。

いずれこれを実際に作って確かめてみたいが、正 5 角形や正 6 角形を作るのがそもそも大変なので、後回しになりそう。

Sec.14　まとめ Conclusion

多面体を構成する板材の墨付け寸法

対象と構成	縁の切込み長さ　(板厚に対する長さ)
正 4 面体 正 3 角形 4 面	$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$
正 6 面体 正方形 6 面	1
正 8 面体 正 3 角形 8 面	$\frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.707$
正 12 面体 正 5 角形 12 面	$\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{7-3\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \fallingdotseq 0.618$
正 20 面体 正 3 角形 20 面	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 0.382$
不等辺 3 角錐 側面 2:2:1 底面 1:1:1	側面どうし　$\frac{\sqrt{11}}{2} \fallingdotseq 1.658$ 底面の縁と側面の底辺　$\frac{2\sqrt{11}}{3\sqrt{5}-1} \fallingdotseq 1.162$
フラーレン 正 5 角形　12 面 (正)6 角形　20 面	5 角形の縁と 6 角形と 5 角形の間の辺 $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \fallingdotseq 0.338$ 6 角形の間の辺　$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 0.382$

角材のまとめでもそうだったが、正 12 面体の縁とフラーレンの 5 角形の縁の切り出し長は等しくなるはず。どちらか、又は両方の計算が間違っている。再計算してみます。