正多面体を角材で作る Regular Polyhedron made of Square Timber
--- 建築と数学のコラボ Collaboration of Architecture and Mathematics ---
付録 1 Appendix 1

2016/10/09

金沢市立工業高等学校 数学科 森下公博
Kimihiro Morishita
Sec.of Math. KanazawaMunicipalTechnicalHighschool

不等辺正 3 角錐の先端部をまとめる金具について論じる。

目次

Sec.1 不等辺正 3 角錐を止める金具について　On Metalic Parts of Regular Triangular Pyramid

不等辺正 3 角錐の先端部をまとめるための金具について論じる。

先の結果をまとめておく。

底辺は 1 辺 L の正 3 角形、側面は各辺が kL　kL　L の 2 等辺 3 角形を考える。

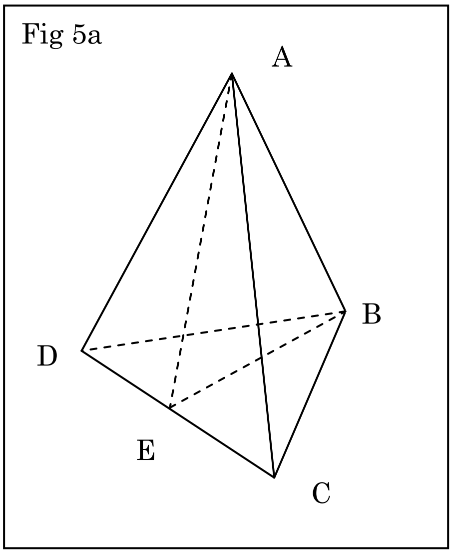


Fig 5a

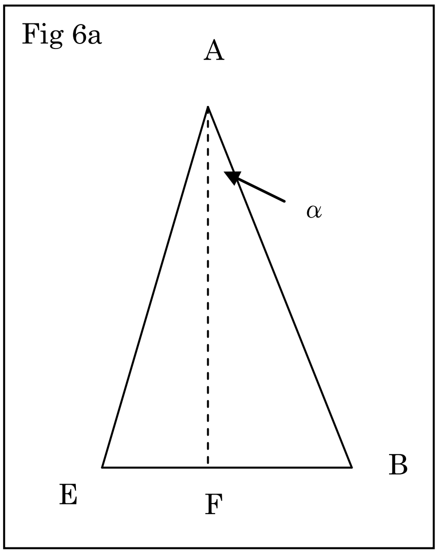


Fig 6a

図 5a で $AB = AC = AD = kL \quad BC = CD = DB = L$ とする。

$AF = yL \quad BF = xL$ とすると

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \quad \cdots ① \\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + y^2 = \dfrac{4k^2 - 1}{4} \quad \cdots ② \end{cases}$$

これを解くと　$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　点 F は 3 角形 ABC の外心即ち重心であった。

$$\sin\alpha = \frac{xL}{kL} = \frac{1}{k\sqrt{3}} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{3k^2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{3k^2 - 1}{3k^2} \qquad \tan^2\alpha = \frac{1}{3k^2 - 1} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}$$

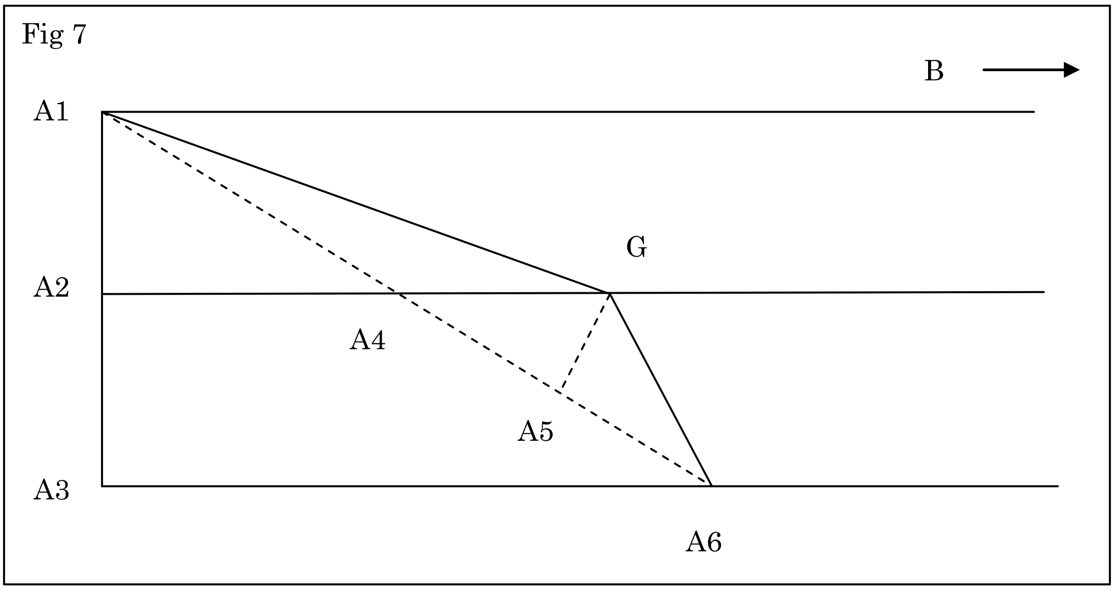


Fig 7

点 A における水平接合角 θ と接合深さ t は正 4 面体と同一で $\theta = 60°$　$t = \dfrac{M}{\sqrt{2}\tan\theta} = \dfrac{M}{\sqrt{6}}$

下部長 A3A6 について　$\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}} = \dfrac{\sqrt{2}M}{A3A6}$　　$A3A6 = \sqrt{2}\sqrt{3k^2 - 1}M$ ・・・①

側部長 A2G について $A2G = \dfrac{A3A6}{2} + \dfrac{t}{\sin\alpha} = \left(\dfrac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{2}} + \dfrac{k\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)M = \dfrac{\sqrt{3k^2 - 1} + k}{\sqrt{2}}M$ ・・・②

これで部材①の点 A 側の墨出しができる。

例　$k = 2$ の場合

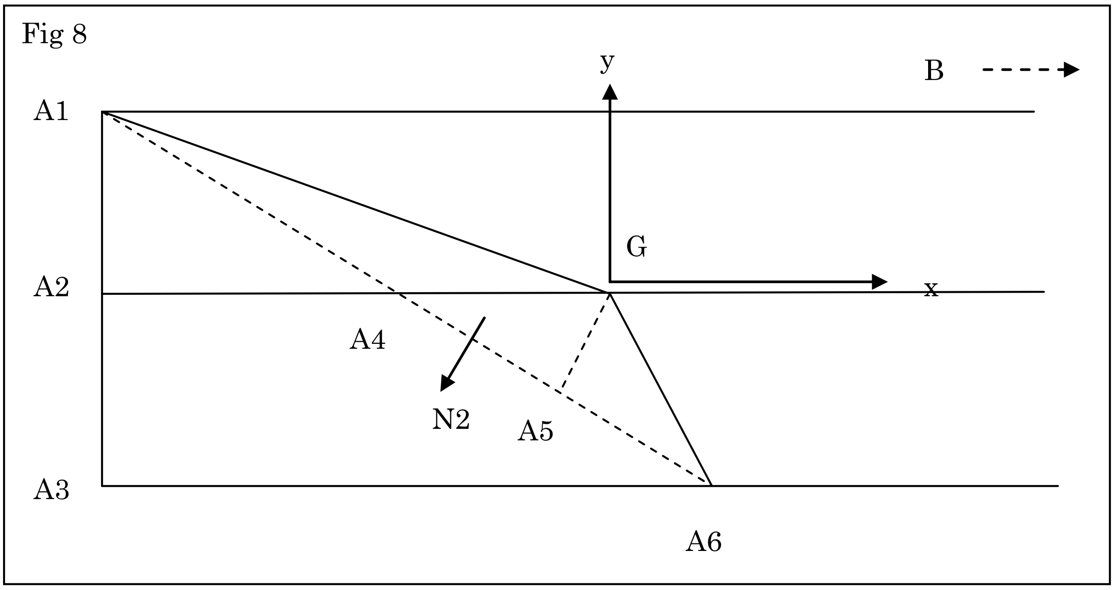
部材①どうしの下部長　$A3A6 = \sqrt{2}\sqrt{3k^2 - 1}M = \sqrt{22}M = 4.690M$

部材①どうしの側部長　$A2G = \dfrac{\sqrt{3k^2 - 1} + k}{\sqrt{2}}M = \dfrac{\sqrt{11} + 2}{\sqrt{2}}M = 3.759M$

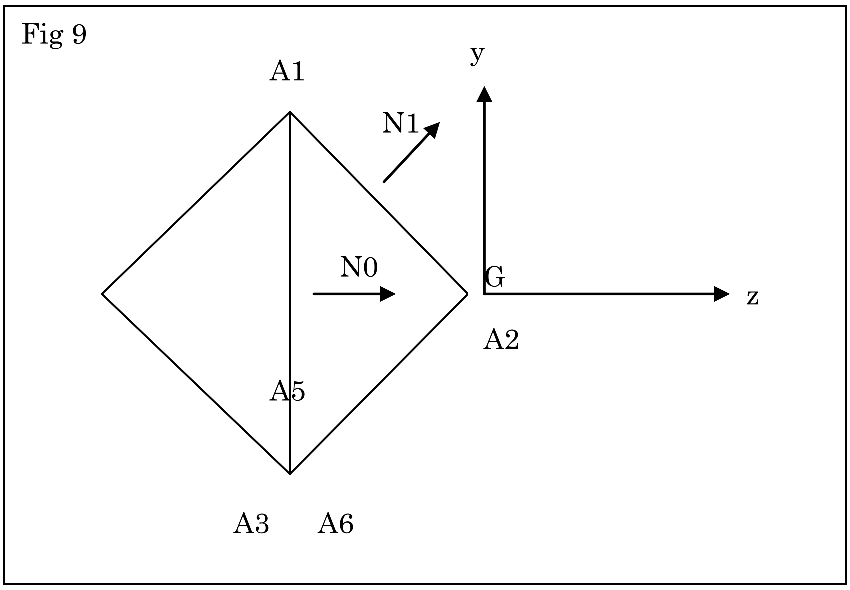
部材①の先端部

この 3 本をどのようにしてまとめるかであるが、M が小さいものなら、数 cm から 10cm 程度のねじ 3 本でよい。作ってしまえばそのままにしておけるし、簡単に分解もできる。しかし、k=2　L=2.5m M=105mm ともなると 1 本の部材が長さ 5m、重量は 25kg から 30kg にもなり、不用心に作ると危険である。また、作成、分解の手間も考えなくてはならない。今回はこの 3 本の部材を 3 枚の金属プレートで止めることにした。その金属プレートは flat(たいら)ではなく、ある程度の角度で曲げておかなくてはならない。その角度を計算する。角材で正 4 面体を作るときの微妙なふくらみの角度である。

改めて、図 7 を 3 次元座標平面(図 8)と考える。点 G を原点とする。各座標軸は図のように定める。



これを A2 の方向から見ると図 9 になる。



各面の法線ベクトル N0、N1、N2 を図のように定める。N2 は描きにくいが、切り口 A1A6G の法線ベクトルである。

$\vec{N}0=(0,0,1)$　$\vec{N}1=(0,1,1)$ である。規格化は気にしない。$\vec{N}2$ を求めるために、まず平面 A1A6G を張るベクトルを 2 本求める。寸法が出ているので比較的簡単である。

$$\vec{GA1}=\left(-A2G,\frac{\sqrt{2}}{2}M,-\frac{\sqrt{2}}{2}M\right)=\left(-\frac{\sqrt{3k^2-1}+k}{\sqrt{2}}M,\frac{1}{\sqrt{2}}M,-\frac{1}{\sqrt{2}}M\right)$$

$$\vec{GA6}=\left(A3A6-A2G,-\frac{\sqrt{2}}{2}M,-\frac{\sqrt{2}}{2}M\right)=\left(\frac{\sqrt{3k^2-1}-k}{\sqrt{2}}M,-\frac{1}{\sqrt{2}}M,-\frac{1}{\sqrt{2}}M\right)$$

面倒なので $\dfrac{1}{M}$ 倍する。

$$\vec{GA1}=\left(-\frac{\sqrt{3k^2-1}+k}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{GA6}=\left(\frac{\sqrt{3k^2-1}-k}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\vec{N}2\perp\vec{GA1}$　$\vec{N}2\perp\vec{GA6}$　であるので次の関係式が成り立つ。$\vec{N}2=(d,e,f)$ とする。

$$\vec{N}2\cdot\vec{GA1}=-\frac{\sqrt{3k^2-1}+k}{\sqrt{2}}d+\frac{1}{\sqrt{2}}e-\frac{1}{\sqrt{2}}f=0 \qquad -\left(\sqrt{3k^2-1}+k\right)d+e-f=0 \quad ・・・③$$

$$\vec{N}2\cdot\vec{GA6}=\frac{\sqrt{3k^2-1}-k}{\sqrt{2}}d-\frac{1}{\sqrt{2}}e-\frac{1}{\sqrt{2}}f=0 \qquad \left(\sqrt{3k^2-1}-k\right)d-e-f=0 \quad ・・・④$$

面倒なので $d=1$ とする。　③+④　$-2k-2f=0$　従って　$f=-k$

これを④に代入すると　$\left(\sqrt{3k^2-1}-k\right)-e+k=0$　従って　$e=\sqrt{3k^2-1}$

従って　$\vec{N}2=\left(1,\sqrt{3k^2-1},-k\right)$ となるが、これでは面 A1A6G にめり込む方向なので、反転して

$\vec{N}2=\left(-1,-\sqrt{3k^2-1},k\right)$ とする。

$\vec{N}0$ と $\vec{N}2$ のなす角 $\theta02$ は水平接合角 60° のはずだが確認してみる。

$$\cos\theta02=\frac{\vec{N}0\cdot\vec{N}2}{\left|\vec{N}0\right|\times\left|\vec{N}2\right|}=\frac{k}{1\times\sqrt{1+3k^2-1+k^2}}=\frac{k}{\sqrt{4k^2}}=\frac{1}{2}$$

確かに　$\theta02=60°$　である。

$\vec{N}1$ と $\vec{N}2$ のなす角 $\theta12$ の 2 倍が問題の角度。

$$\cos\theta12=\frac{\vec{N}1\cdot\vec{N}2}{\left|\vec{N}1\right|\times\left|\vec{N}2\right|}=\frac{-\sqrt{3k^2-1}+k}{\sqrt{2}\sqrt{4k^2}}=\frac{-\sqrt{3k^2-1}+k}{2\sqrt{2}k}$$

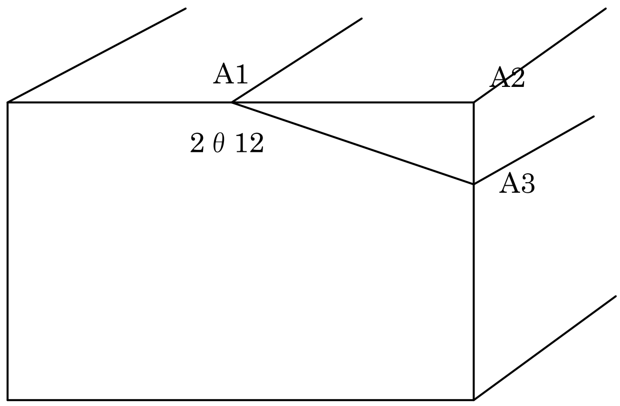
2 倍角公式より　$\cos2\theta12=2\cos^2\theta12-1=2\times\frac{3k^2-1-2k\sqrt{3k^2-1}+k^2}{8k^2}-1=\frac{-1-2k\sqrt{3k^2-1}}{4k^2}$

k=1 の場合は　$\cos2\theta12=\frac{-1-2\sqrt{2}}{4}\fallingdotseq-0.9571$　従って　$2\theta12\fallingdotseq163°$　正 4 面体の膨らみはこの角度である。

k=2 の場合は　$\cos2\theta12=\frac{-1-4\sqrt{11}}{16}\fallingdotseq-0.8916$　従って　$2\theta12\fallingdotseq153°$　k が大きくなると横方向にも鋭くなることがわかる。

$\tan(\pi - 2\theta 12) = \tan(-2\theta 12) = -\tan(2\theta 12)$　これを求める。

Fig 10



$$\cos^2 2\theta 12 = \frac{1 + 4k\sqrt{3k^2 - 1} + 4k^2(3k^2 - 1)}{16k^4} = \frac{3k^4 - k^2 + k\sqrt{3k^2 - 1}}{4k^4}$$

$$\sin^2 2\theta 12 = 1 - \cos^2 2\theta 12 = \frac{k^4 + k^2 - k\sqrt{3k^2 - 1}}{4k^4}$$

$$\tan^2 2\theta 12 = \frac{k^4 + k^2 - k\sqrt{3k^2 - 1}}{3k^4 - k^2 + k\sqrt{3k^2 - 1}}$$

k=2 のとき　$\tan^2 2\theta 12 = \dfrac{10 - \sqrt{11}}{22 + \sqrt{11}}$　　$\tan 2\theta 12 = \sqrt{\dfrac{10 - \sqrt{11}}{22 + \sqrt{11}}} \fallingdotseq 0.5138$

これで、金具を叩いて曲げる台の寸法が出た。

図 10 で、A1A2 に対して A2A3 を 0.51 にし、三角柱 A1A2A3 を切り取ればよい。

実際は A1A2 = 4cm、A2A3 = 2cm で十分である。