

2016/11/06

金沢市立工業高等学校 数学科 森下公博
Kimihiro Morishita
Sec.of Math. KanazawaMunicipalTechnicalHighschool

追記 まとめの章に製作に必要な寸法の表を追加しました。2018/06/28

木造り(きづくり)は木造建築の要です。

数学で扱う立体、主に正多面体を角材でつくるために必要な墨線の引き方、所謂、墨出し(Marking)を考えます。

実際にこのようなものを日頃作っている大工さんにとっては笑止かもしれませんが、あえて数学的に作ってみます。組木の技術を使わずに単純な部品を作り、それを接着させて作るとうします。このような場合にダボを使って接合する方法もあるそうです。あながち間違いではないかと思ひます。

日本の木造建築技術は世界一です。先日の NHK のテレビ番組によればドイツの木工技術も大したものですが・・・。プロの大工さんから、全くの建築素人のために参考になるご指摘やご指導などを頂ければ幸いです。

目次

Sec.1 正 4 面体および不等辺正 3 角錐 Regular Tetrahedron & Scalene Regular Triangular Pyramid

Sec.2 正 6 面体 Regular Hexahedron

Sec.3 正 8 面体および等辺正 4 角錐

Regular Octahedron & Equilateral Regular Quadrangular Pyramid

Sec.4 正 12 面体 Regular Dodecahedron

Sec.5 正 20 面体 Regular Icosahedron

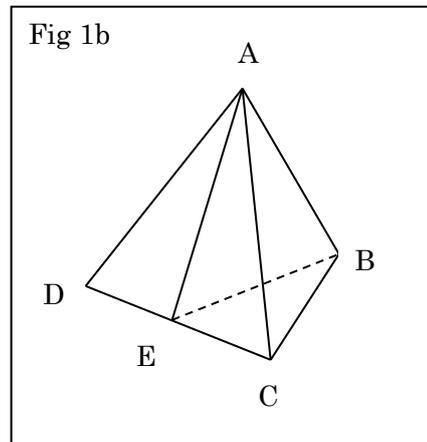
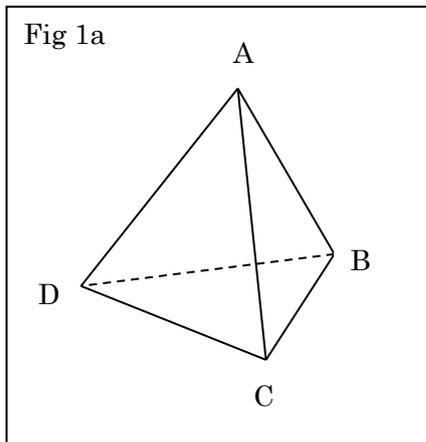
Sec.6 フラーレン Equilateral Fullerene

Sec.7 まとめ Conclusion

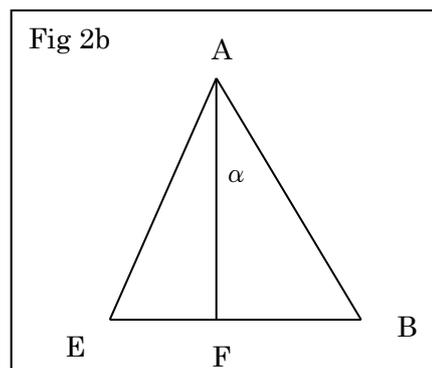
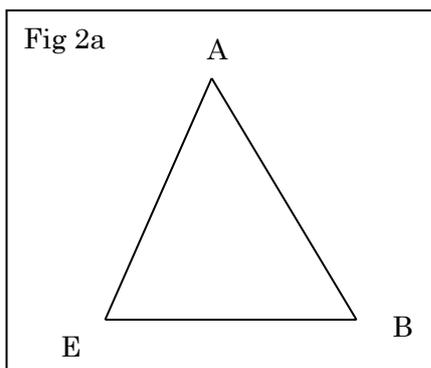
板材による正多面体の製作を加えた増補版がこれと同じフォルダにあります。よろしければご覧下さい。

Sec.1 正4面体 Marking of Regular Tetrahedron

各辺の長さが L 、角材の断面は正方形としてその1辺の長さは M とする。正4面体 $ABCD$ を角材の外側の稜線の形として考える。



辺 CD の中点を E とし、断面の三角形 ABE を考える。



A から辺 BE に垂線を下し、その足を F とする。直線 AF は3角形 BCD の回転に関する対称軸であり、点 F は3角形 BCD の外心であるが、3角形 BCD は正3角形なので、点 F は3角形 BCD の重心にもなっている。そのため計算は楽である。 $\angle BAF = \alpha$ とする。以後この角度を垂直接合角 (Vertical Joint Angle)と呼ぶことにする。

$$AB = L \quad AE = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}L \quad BF = BE \times \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}L \quad \text{であるので、}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{となる。}$$

ここで、正四面体を点 A の真上から見た図 3 を考える。角材の様子も付け加える。

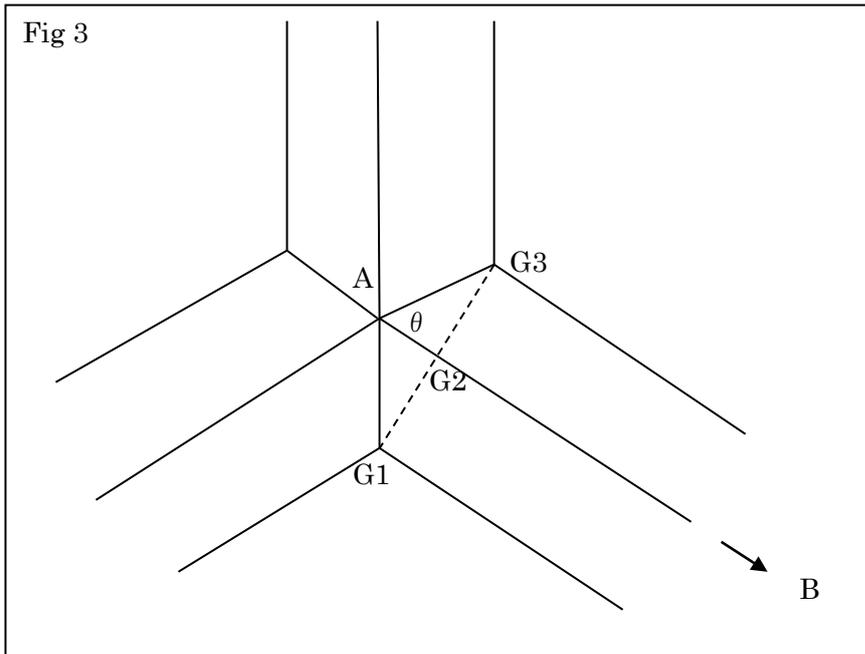
しばらく、この図を、頂点 A に接した水平面に投影したものとする。そうすると

$\angle G1AG3 = 120^\circ \quad AB \perp G1G3$ であるので $\angle G1AG2 = 60^\circ$ 以後、この角 $G1AG2$ を水平接合角

(Horizontal Joint Angle)と呼ぶことにする。さらに $G1G3 = \sqrt{2}M$ であるから $G1G2 = \frac{\sqrt{2}}{2}M$ さ

らに $\frac{G1G2}{AG2} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ であるので $AG2 = \frac{G1G2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}M$ が得られる。以後これを接合深さ

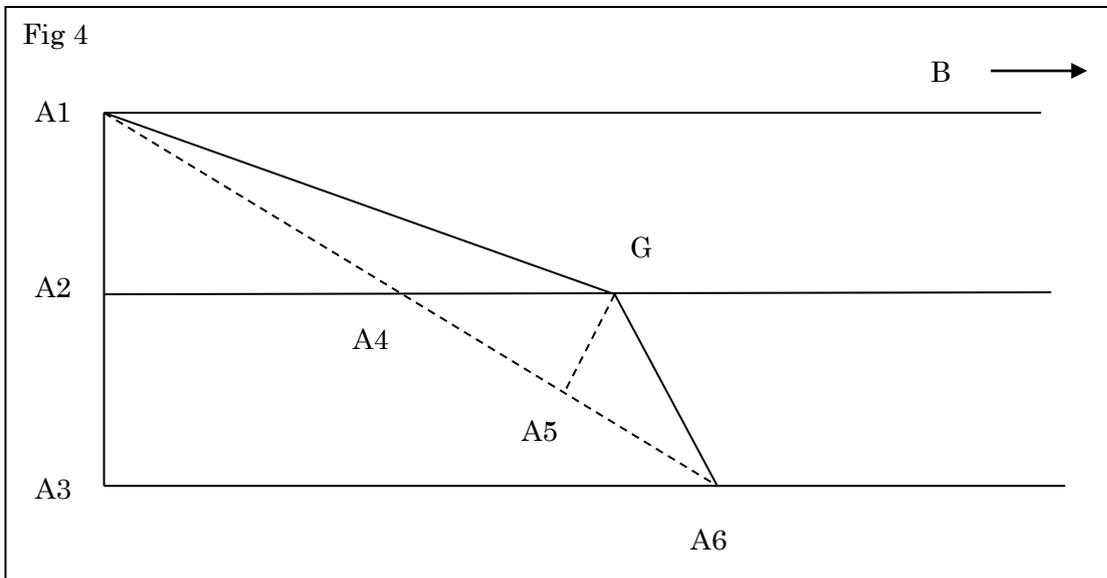
(Joint Depth)と呼ぶことにする。これが大切な値となる。正4面体や立方体、正12面体でも、3本の角材が対称的に1点に集まる場合はこの値はすべて同じである。この図はすべて共通であるからである。



水平接合角 θ と接合深さ t の関係は $t = \frac{M}{\sqrt{2} \tan \theta}$ である。

ここで、図 2b の視点から見た、部材の断面の投影図を考える。

図 3 の点 A を図 4 では A1 とする。図 3 の G1 と G2 と G3 は図 4 では重なって G となっている。図 3 の点 A の真下に図 4 の A4、A5、A6 がある。A1A3 は角材の縦の断面の対角線なので $A1A3 = \sqrt{2}M$



また、図 2b の角 α と同じものが角 $\angle BA1A6$ となる。 $\angle BA1A6 = \alpha = \angle A1A6A3$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A1A3}{A3A6} \quad \text{従って} \quad A3A6 = \sqrt{2}A1A3 = 2M \cdots \text{①} \quad \text{また} \quad A2A4 = M$$

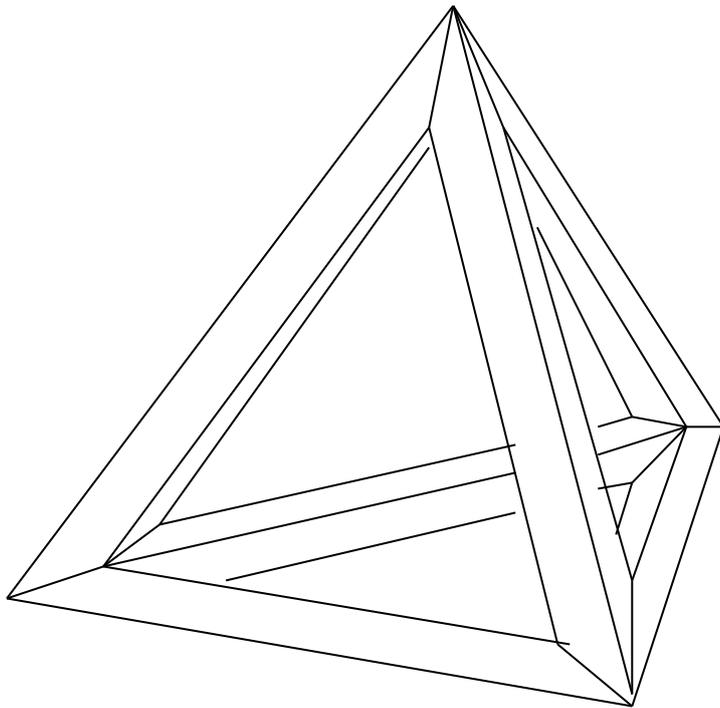
ここで 図 3 の AG2 が図 4 の A5G となって表れる。 $A5G = \frac{1}{\sqrt{6}}M$

勿論 $A1A6 \perp A5G$ であるので $\triangle A1A2A4 \sim \triangle GA5A4$ また $A1A6 = \sqrt{6}M$

従って $A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \sqrt{6} : \sqrt{2}$

$$A4G = \sqrt{3}A5G = \frac{1}{\sqrt{2}}M \quad A2G = A2A4 + A4G = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)M \doteq 1.71M \dots \textcircled{2}$$

式①が表す長さを下部長(Under Length)、式②が表す長さを側部長(Side Length)ということにする。これらを用いて、角材に墨線を描く。A1G と GA6 である。G に鋸を入れ、A1 と A6 へ進ませる。これを向こう側からも切る。両端を同様に加工した部材を 6 本作り、組み合わせると少し膨らみがある正四面体ができる。



写真は L=77cm M=10.5cm のもの。



第 26 回全国産業教育フェア石川大会のモニュメントとして、不等辺正 3 角錐を作ることにした。
 底辺は 1 辺 L の正 3 角形、側面は各辺が kL kL L の 2 等辺 3 角形のもの考える。

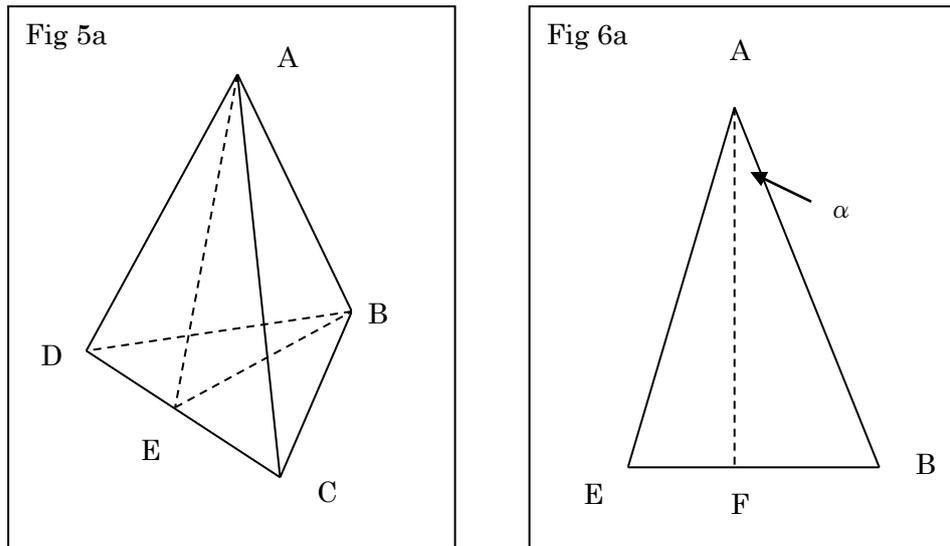


図 5a で $AB = AC = AD = kL$ $BC = CD = DB = L$ とする。辺 CD の中点を E とする。
 まず点 A における接合を考える。辺 AB, AC, AD 即ち部材①について調べる。辺 BC, CD, DB は部材②とする。

$$AE = \sqrt{(kL)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}L = \frac{L\sqrt{4k^2 - 1}}{2}$$

$AF = yL$ $BF = xL$ とすると

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \cdots \textcircled{1} \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2 - 1}{4} \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 = k^2 - \frac{4k^2 - 1}{4} \quad x^2 - \frac{3}{4} + \sqrt{3}x - x^2 = k^2 - k^2 + \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3}x = 1 \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{点 } F \text{ は } 3 \text{ 角形 } ABC \text{ の外心即ち重心なのは当たり前でした。}$$

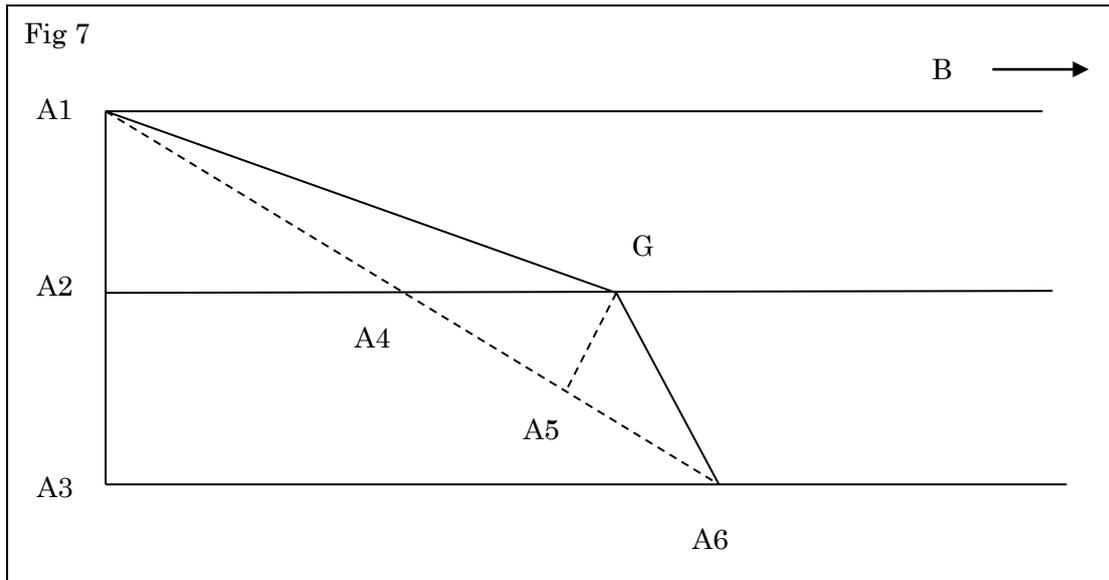
$$\sin \alpha = \frac{xL}{kL} = \frac{1}{k\sqrt{3}} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{3k^2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{3k^2 - 1}{3k^2} \quad \tan^2 \alpha = \frac{1}{3k^2 - 1} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}$$

$$\text{点 } A \text{ における水平接合角 } \theta \text{ と接合深さ } t \text{ は正 4 面体と同一で } \theta = 60^\circ \quad t = \frac{M}{\sqrt{2} \tan \theta} = \frac{M}{\sqrt{6}}$$

$$\text{下部長 } A3A6 \text{ について } \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2}M}{A3A6} \quad A3A6 = \sqrt{2}\sqrt{3k^2 - 1}M \cdots \textcircled{1}$$

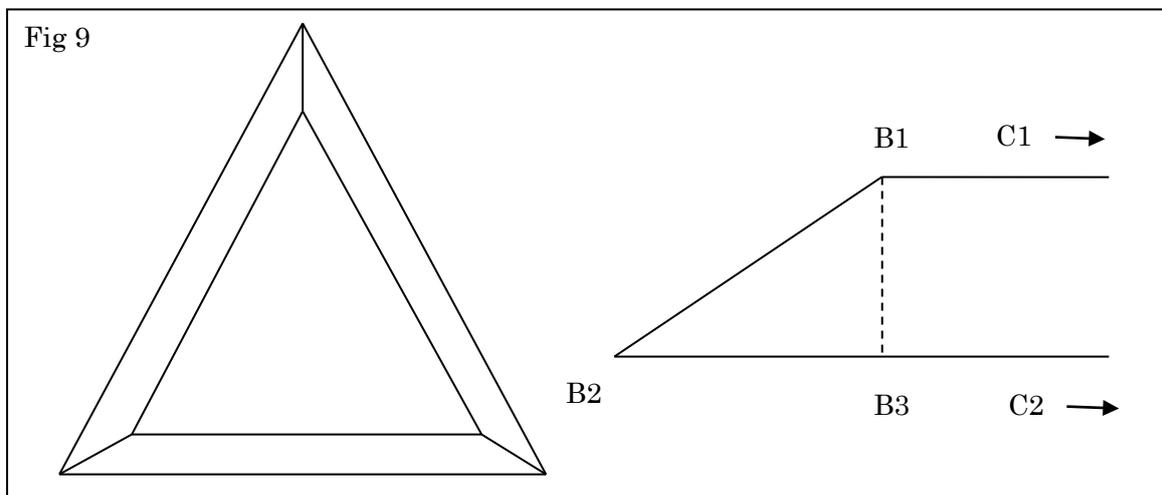
$$\text{側部長 } A2G \text{ について } A2G = \frac{A3A6}{2} + \frac{t}{\sin \alpha} = \left(\frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{2}} + \frac{k\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)M = \frac{\sqrt{3k^2 - 1} + k}{\sqrt{2}}M \cdots \textcircled{2}$$

これで部材①の点 A 側の墨出しができる。



次に点 B における接合を考える。今回作成するモニュメントはかなりの大きさで、点 B における接合強度が問題であるので、思い切って単純な構造をとることにする。確かに次に示すように部材②は単純なのだが、部材①の接合部は多少複雑なものになる。墨出しも切削も面倒である。

底になる部材②は正三角形の単純な枠のみとする。枠の内法の 1 辺を L とする。この隅に上部から部材①がはまり込む。



枠は 3 本の部材②からなる。図 9 で、 $B1C1 = L$ $\angle B1B2B3 = 30^\circ$ $B1B3 = M$ であるから、
 $B2B3 = \sqrt{3}M$ $B2C2 = L + 2\sqrt{3}M$ となる。これで底部ができる。
 この底部の隅に部材①の図 10a のものが上からはまり込むようにする。

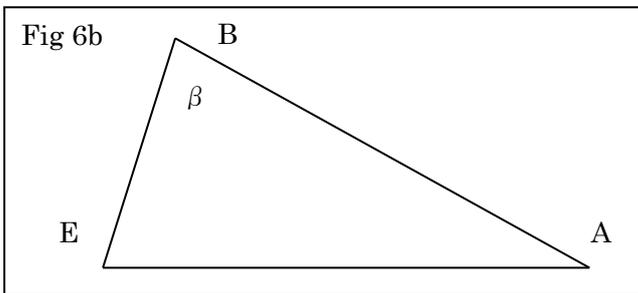
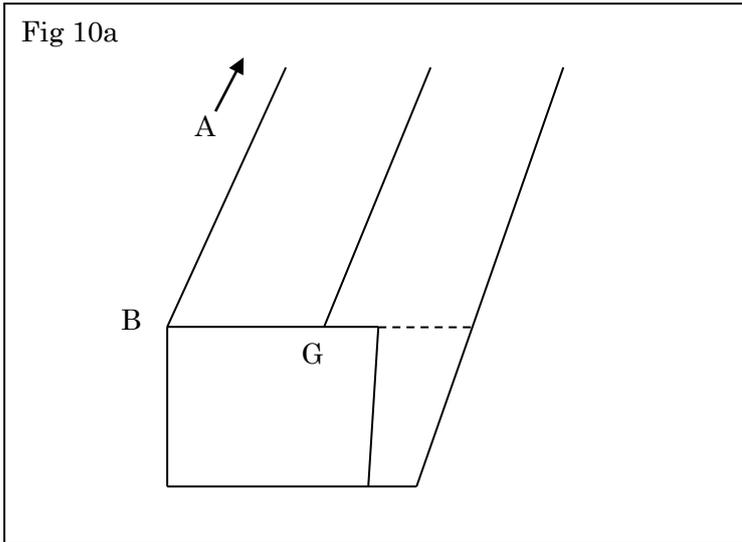


図 6b で、 $AB = kL$ $BE = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ $AE = \frac{\sqrt{4k^2 - 1}}{2}L$ であつた。余弦定理より、

$$\cos \beta = \frac{k^2 + \frac{3}{4} - \frac{4k^2 - 1}{4}}{2 \times k \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}k} \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{3k^2} \quad \sin^2 \beta = \frac{3k^2 - 1}{3k^2}$$

$$\tan^2 \beta = 3k^2 - 1 \quad \tan \beta = \sqrt{3k^2 - 1}$$

この角 β が点 B における部材①の垂直接合角になるが、今回は部材①の B 側の墨出しは特別なものとなる。図 10b で、

$$B6H = \sqrt{2}M \quad B1B4 = M \quad \angle AB1H = \angle B5B4B1 = \angle B7B8B4 = \beta \quad \text{であるので}$$

$$B5B1 = M \sin \beta = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3}k} M \quad B5B4 = M \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}k} M$$

$$\tan \beta = \sqrt{3k^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}M}{B1B6} \quad \text{なので} \quad B1B6 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3k^2 - 1}} M$$

$$B4B7 = \sqrt{2}M - B4B5 = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{3}k} \right) M \quad \text{また} \quad \tan \beta = \sqrt{3k^2 - 1} = \frac{B4B7}{B7B8} \quad \text{であるので}$$

図 10b の B1H が図 11 では BH である。点 B に、図 10b の B1 と B4 が重なる。

$$BH = \frac{\sqrt{6k}}{\sqrt{3k^2 - 1}} M \quad OH = \frac{BH}{2} = \frac{\sqrt{3k}}{\sqrt{2}\sqrt{3k^2 - 1}} M \quad OG = \frac{GG}{2} = \frac{M}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \gamma = \frac{OG}{OH} = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3k}} \quad \tan^2 \gamma = \frac{3k^2 - 1}{3k^2} = \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} \quad \text{であるが}$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{3k^2 - 1}{6k^2 - 1} \quad \cos^2 \gamma = \frac{3k^2}{6k^2 - 1} \quad \text{と解けるので} \quad \cos \gamma = \frac{\sqrt{3k}}{\sqrt{6k^2 - 1}}$$

$$\text{さらに} \quad \frac{JI}{BJ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{JI}{HJ} = \tan \gamma = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3k}} \quad \text{であるので}$$

$$JI = \frac{BJ}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3k}} HJ \quad \text{従って} \quad BJ = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{k} HJ$$

$$\text{さらに} \quad BJ + HJ = \left(\frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{k} + 1 \right) HJ = \frac{\sqrt{3k^2 - 1} + k}{k} HJ = BH = \frac{\sqrt{6k}}{\sqrt{3k^2 - 1}} M \quad \text{であるので}$$

$$HJ = \frac{\sqrt{6k^2}}{\sqrt{3k^2 - 1}(\sqrt{3k^2 - 1} + k)} M \quad \text{が求まる。}$$

$$\frac{HJ}{HI} = \cos \gamma = \frac{\sqrt{3k}}{\sqrt{6k^2 - 1}} \quad \text{であるから} \quad HI = \frac{\sqrt{6k^2 - 1}}{\sqrt{3k}} HJ = \frac{\sqrt{2k}\sqrt{6k^2 - 1}}{\sqrt{3k^2 - 1}(\sqrt{3k^2 - 1} + k)} M$$

B4B8 の墨出しのために B9B10 も求めておく。

$$\frac{B9B10}{B7B8} = \frac{B4B9}{B4B7} \quad \text{であるので}$$

$$B9B10 = \frac{B4B9 \times B7B8}{B4B7} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{k\sqrt{3}} \right)}{\left(\sqrt{2} - \frac{1}{k\sqrt{3}} \right)} \times \frac{(k\sqrt{6} - 1)M}{k\sqrt{3}\sqrt{3k^2 - 1}} = \frac{\frac{k\sqrt{6}}{2} - 1}{k\sqrt{6} - 1} \times \frac{(k\sqrt{6} - 1)M}{k\sqrt{3}\sqrt{3k^2 - 1}} = \frac{\frac{k\sqrt{6}}{2} - 1}{k\sqrt{3}\sqrt{3k^2 - 1}} M$$

これで部材①の B 側の墨出しがすべてできる。

図 10b で点 I から左に伸びる線 IN が B1B4 と平行になるように思うかもしれないが、そうはならない。なぜなら B4B8 を通る断面は図 11 の点 I の真上を通らないからである。点 N の墨出しは、断面 A4A8 を作ってから、直線 B4B8 から 30 度開いた点とすればよい。計算でも求められるが、このほうが簡単である。三角定規の出番である。

実際の制作時では、まず B1B4 の断面を切り出し、直線 B1B4 を引く。次に断面 B4B8 を切り出し、直線 B4B8 から 30 度開いた点 N を取り、直線 IN を引くとよい。

例 $k = 2$ の場合

$$\text{部材①どうしの下部長} \quad A3A6 = \sqrt{2}\sqrt{3k^2 - 1}M = \sqrt{22}M = 4.690M$$

$$\text{部材①どうしの側部長} \quad A2G = \frac{\sqrt{3k^2 - 1} + k}{\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{11} + 2}{\sqrt{2}}M = 3.759M$$

部材①の B 側について

$$B5B1 = \frac{\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{3k}}M = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}M = 0.957M$$

$$B5B4 = \frac{1}{\sqrt{3k}}M = \frac{1}{2\sqrt{3}}M = 0.289M$$

$$B1B6 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3k^2 - 1}}M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}M = 0.426M$$

$$B7B8 = \frac{\sqrt{6k} - 1}{\sqrt{3}\sqrt{3k^2 - 1k}}M = \frac{2\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{33}}M = 0.339M$$

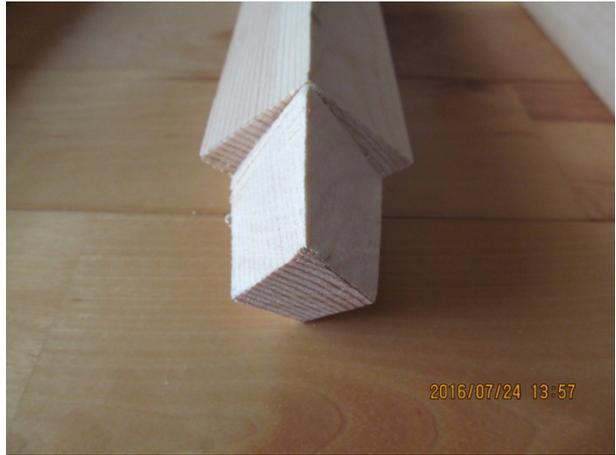
$$B9B10 = \frac{\frac{k\sqrt{6}}{2} - 1}{k\sqrt{3}\sqrt{3k^2 - 1}}M = \frac{\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{33}}M = 0.126M$$

$$HI = \frac{\sqrt{2k}\sqrt{6k^2 - 1}}{\sqrt{3k^2 - 1}(\sqrt{3k^2 - 1} + k)}M = \frac{2\sqrt{46}}{\sqrt{11}(\sqrt{11} + 2)}M = 0.769M$$

写真は $k=2$ $L=46\text{cm}$ $M=40\text{mm}$ のもの。上部はとりあえず輪ゴムで止めてある。



部材①の基部



部材①の先端部

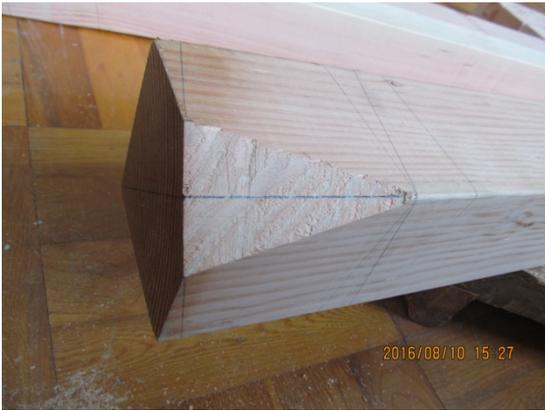


部材②を組んだもの及び①との接合部



もう一度説明します。

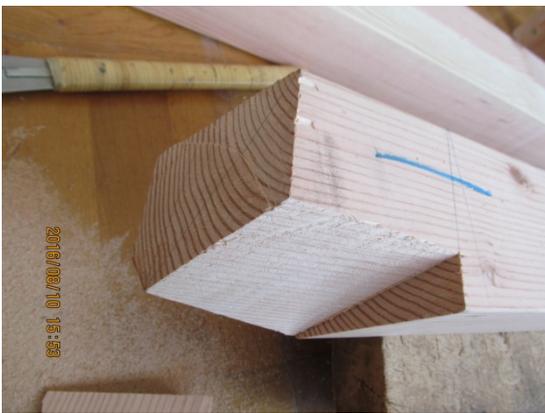
まず B1B4 の断面を切り出し、直線 B1B4 を引く。次に断面 B4B8 を切り出し、



そこに、直線 B4B8 を引き、30 度開いた点 N を取り、直線 IN を引く



直線 IN と直線 B1B4 を通るように切り出す。両側とも切り出す。



夏休みをかけてやっと部品ができた。 $k=2$

$L=2.5m$ $M=105mm$ 出来上がりの高さは約 4.9m。



仮組みしてみました。

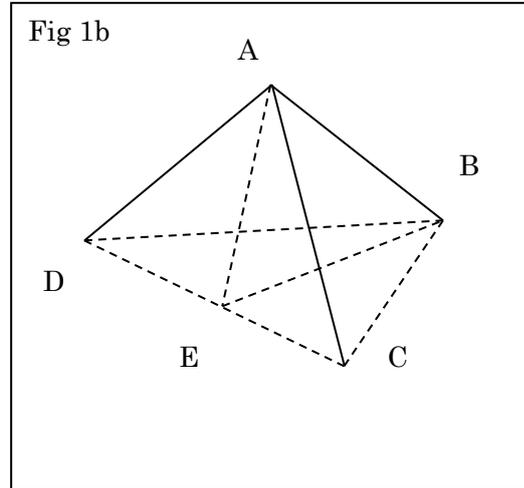
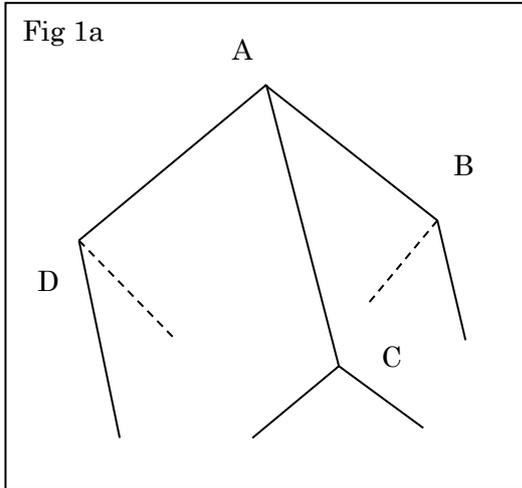




Sec.2 正6面体(立方体) Marking of Regular Hexahedron

正6面体すなわち立方体も正4面体とほぼ同様に考えられる。接合部のみを考えるので、立方体全体でなく、その一部分である正3角錐 ABCD を考える。正4面体では角 BAC などは 60° だったが、立方体では角 BAC や角 CAD や角 BAD は 90° となる。正3角形 BCD を底面とする。

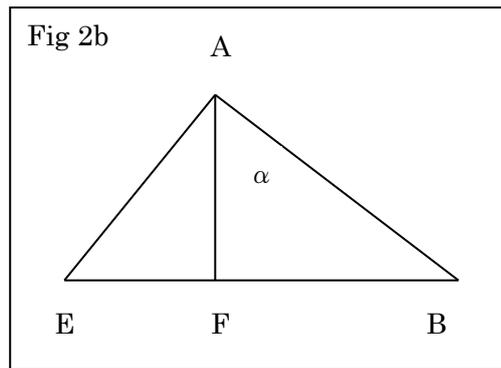
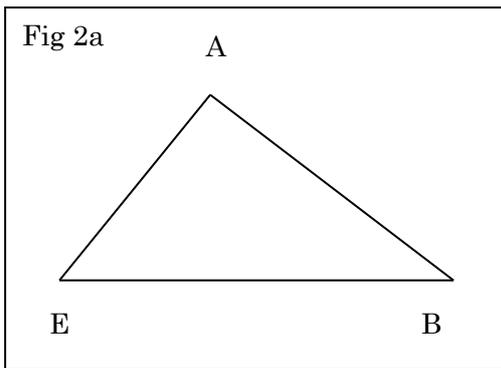
$AB = AC = AD = L$ $BC = CD = DB = \sqrt{2}L$ である。



やはり、辺 CD の中点を E とし、図 2 で 3 角錐を縦に切った断面の 3 角形 ABE を考える。A から辺 BE に垂線を下し、その足を F とする。正4面体の場合と同じく点 F は正3角形 BCD の外心即ち重心である。垂直接合角 $\angle BAF = \alpha$ とする。

$AB = L$ $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}L$ $BE = \frac{\sqrt{6}}{2}L$ $BF = BE \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}L$ であるので、

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan \alpha = \sqrt{2}$ となる。



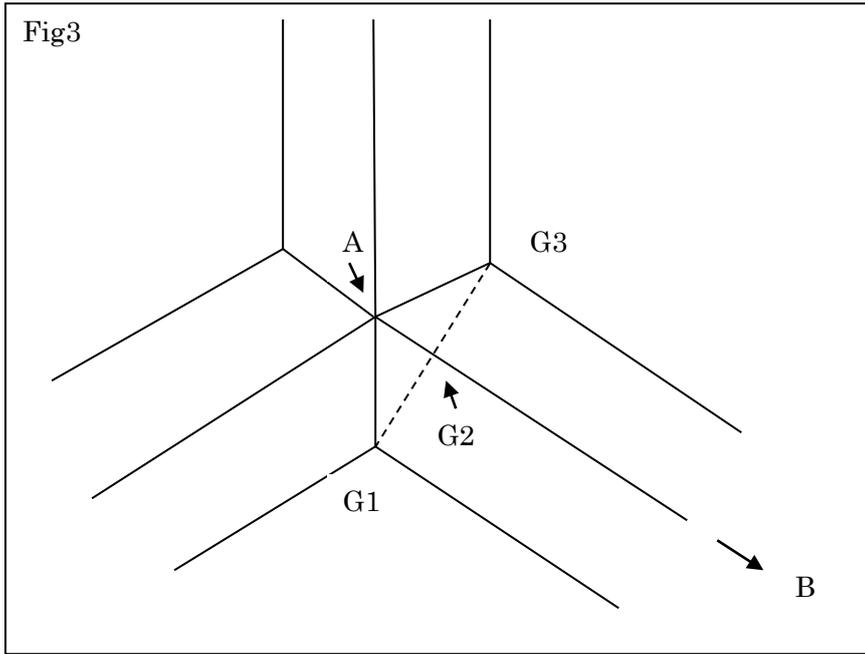
ここで、正4面体を点 A の真上から見た図 3 を考える。角材の様子も付け加える。

正4面体の場合と完全に同一の図であり接合深さは $AG2 = \frac{G1G2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}M$ となる。

ここで、図 2b の視点から見た、部材の断面の投影図 図 4 を考える。

図 3 の点 A を図 4 では A1 とする。図 3 の G1 と G2 と G3 は図 4 では重なって G となっている。図 3 の点 A の真下に図 4 の A4、A5、A6 がある。A1A3 は角材の縦の断面の対角線なので

$A1A3 = \sqrt{2}M$ $A1A2 = \frac{\sqrt{2}}{2}M$



また、図 2b の角 α と同じものが角 $\angle BA1A6$ となる。 $\angle BA1A6 = \alpha = \angle A1A6A3$

$$\tan \alpha = \sqrt{2} = \frac{A1A3}{A3A6} \quad \text{従って} \quad A3A6 = \frac{A1A3}{\sqrt{2}} = M \cdots \text{①} \quad \text{また} \quad A2A4 = \frac{M}{2}$$

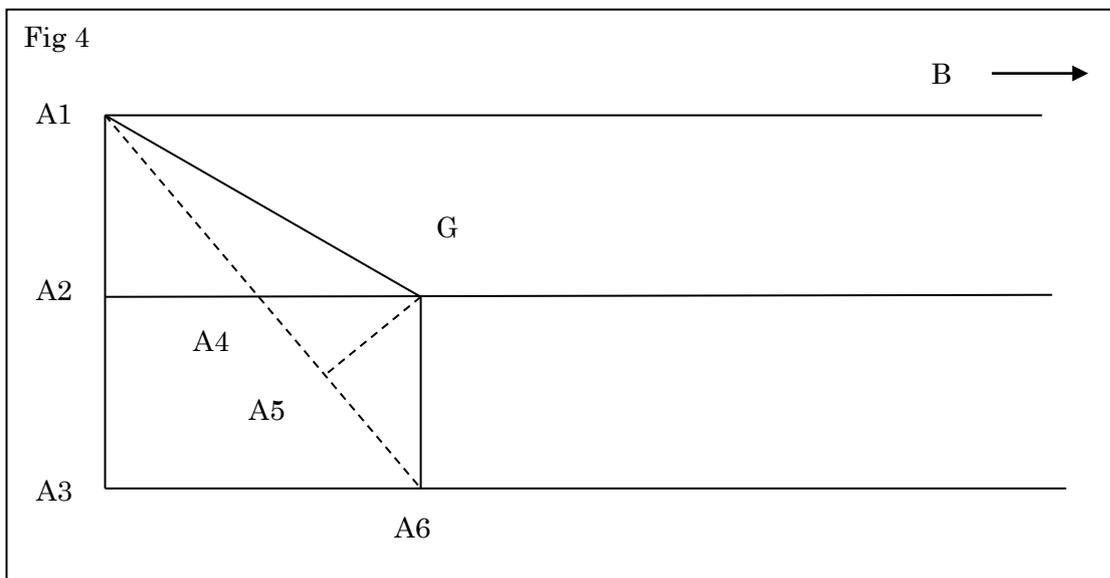
ここで 図 3 の $AG2$ が 図 4 の $A5G$ となって表れる。 $A5G = \frac{1}{\sqrt{6}}M$

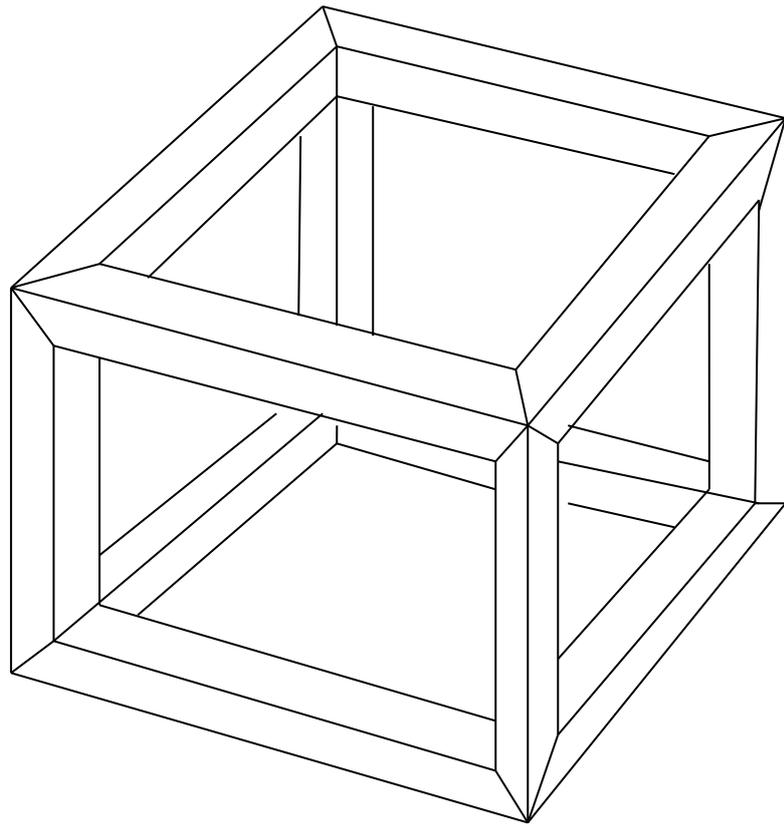
勿論 $A1A6 \perp A5G$ であるので $\triangle A1A2A4 \sim \triangle GA5A4$ また $A1A6 = \sqrt{3}M$

従って $A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

$$A4G = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} A5G = \frac{1}{2}M \quad A2G = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)M = M \cdots \text{②}$$

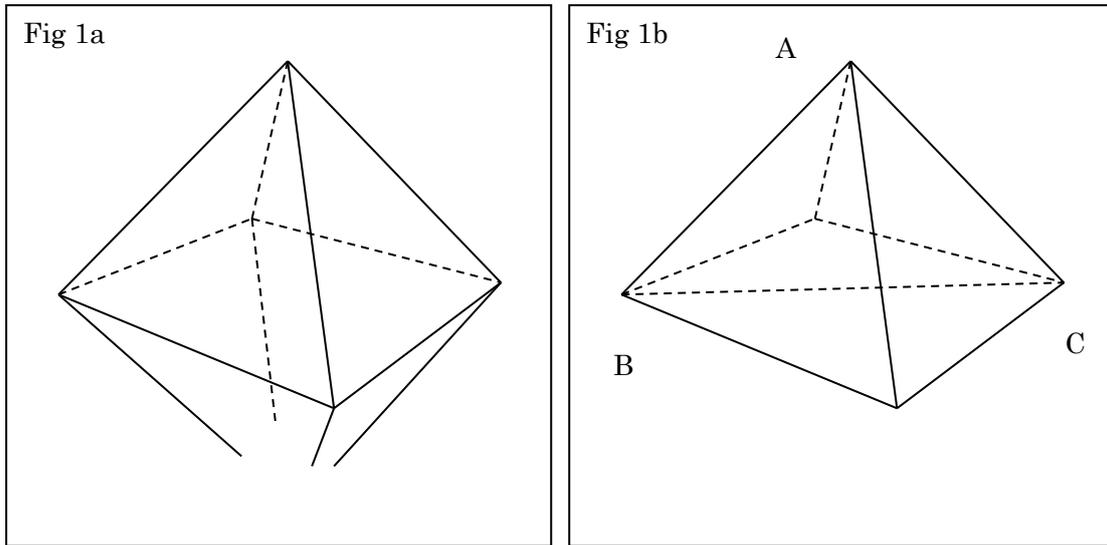
となり、当然至極の図形が得られる。両端を同様に加工した部材を 12 本作って組み合わせると立方体になる。



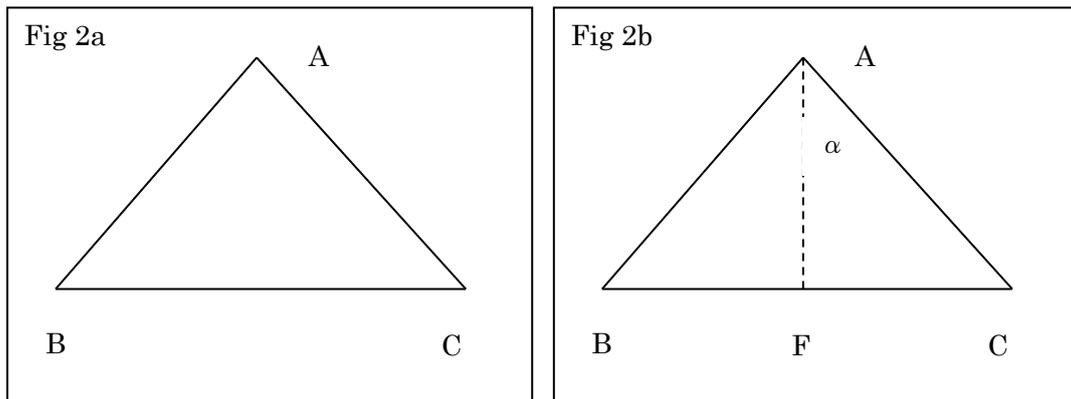


Sec.3 正8面体 Marking of Regular Octahedron

一辺が L の正3角形8面で構成される。



上半分の正4角錐を考える。その断面、3角形 ABC を考える。



$AB = AC = L$ $BC = \sqrt{2}L$ であるから3角形 ABC は直角2等辺3角形で A から BC に下した垂線の足 F とすると、角 CAF 即ち垂直接合角 α は 45° である。従って $\tan \alpha = 1$ となる。
 対称性が高いので計算は楽である。接合部は4つの部材が対称的に集まるので大変単純である。点 A の真上から見た接合部の様子は図3のようになる。

部材の角材の切り口の一辺を M とすると、 $G1G3 = \sqrt{2}M$ $G2G3 = \frac{\sqrt{2}M}{2} = \frac{M}{\sqrt{2}}$

また、3角形 AG2G3 は直角2等辺3角形なので接合深さ $AG2 = \frac{M}{\sqrt{2}}$ となる。

従って、角材の端の様子は図4のようになる。

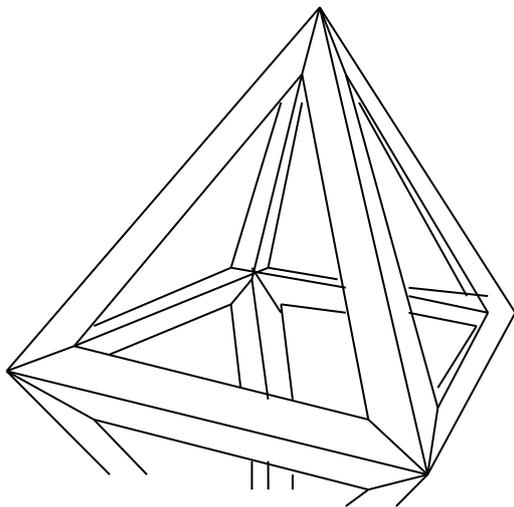
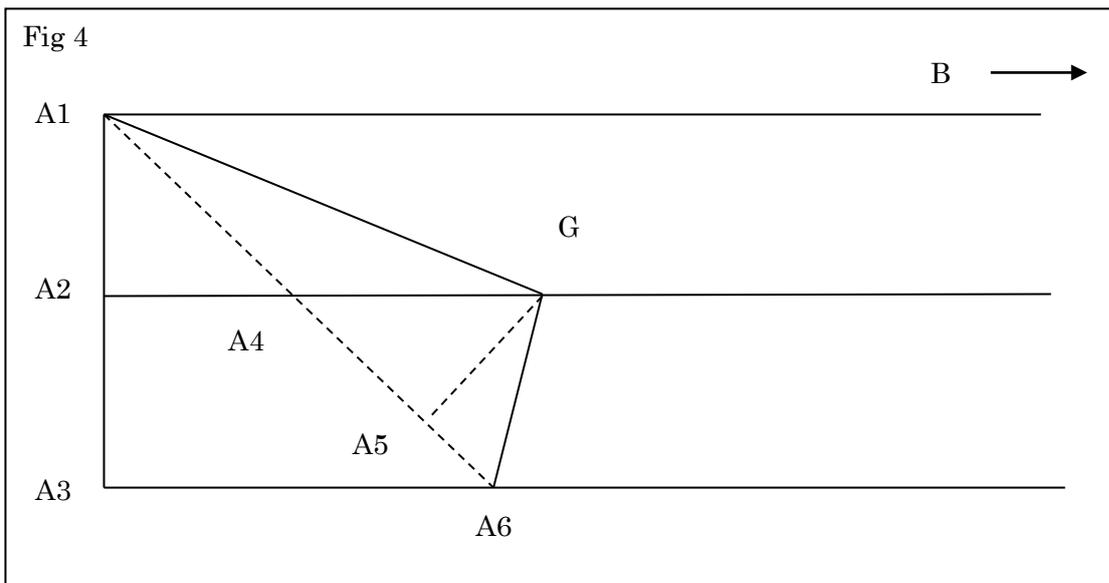
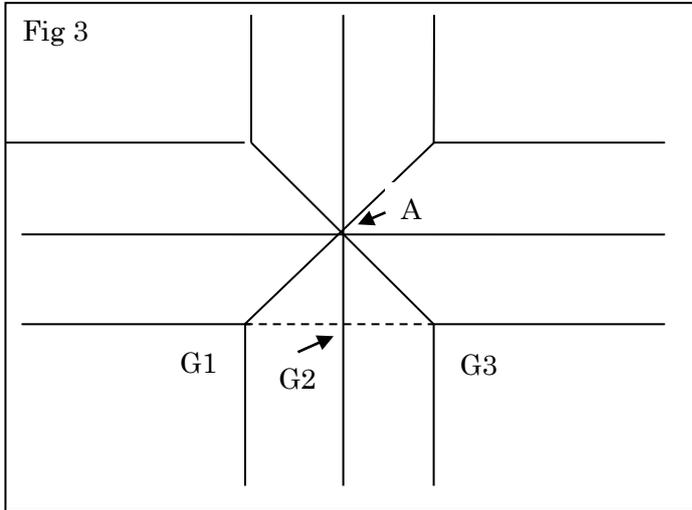
$\angle BA1A6 = \angle A1A6A3 = \alpha = 45^\circ$ 従って $A1A3 = A3A6 = \sqrt{2}M \dots \textcircled{1}$

3角形 A1A2A4 も A4A5G も直角2等辺3角形である。また A5G は図3の AG2 なので

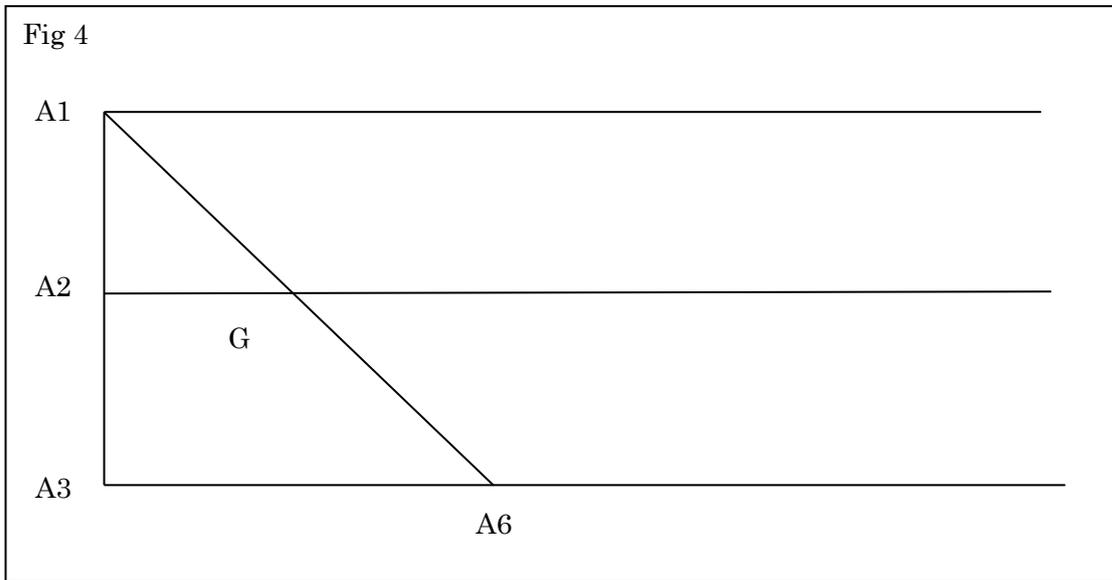
$$A2A4 = \frac{\sqrt{2}}{2}M \quad A5G = A5A4 = \frac{\sqrt{2}}{2}M \quad A4G = M$$

従って $A2G = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)M \doteq 1.71M \dots \textcircled{2}$ ①と②より墨線 A1G と A6G が書ける。これが 12

本で正 8 面体ができる。

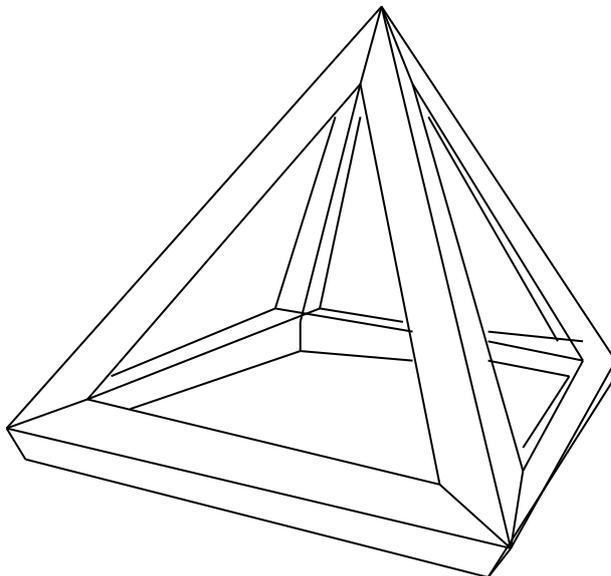


しかし、実際に 12 本の部材を用意するのは正 6 面体同様大変で、作ったとしても座りが悪い。風が吹いたら転がっていきそう。そこで、座りが良いと思われる、正 4 角錐を作った。部材は正 8 面体と同様のものが 4 本、残りの 4 本は片面の細工が正 8 面体と同様で、片面は接合深さを 0 にすればよい。その墨出しは簡単である。



$$A1A3 = A3A6 = \sqrt{2}M \dots \textcircled{1} \quad A2G = \frac{\sqrt{2}}{2}M \dots \textcircled{2}$$

これを G から切始め、A1 と A6 まで進ませる。これなら庭におくオブジェとして使えそうである。



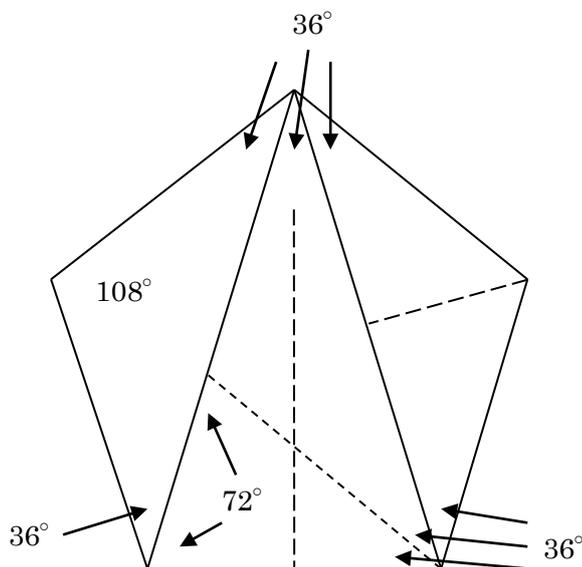
写真は廃材で作った正4角錐。廃材の断面は正方形でないので墨出しと切削は面倒であった。



Sec.4 正 12 面体 Marking of Regular Dodecahedron

正 12 面体は正 5 角形 12 面でできている。1 つの頂点には正 5 角形 3 枚が集まる。角材 3 本ずつが接合するので正 4 面体や正 6 面体の要領が使える。まずは正 5 角形の復習から。

1 辺の長さが 1 の正 5 角形の 1 つの頂点から対角線 2 本を引く。



3 つの 2 等辺 3 角形のうち、真ん中に注目する。これは黄金 3 角形というそうです。等辺の長さ即ち正 5 角形の対角線の長さを x とする。小学生でもできる計算で、この 3 角形の底角 72° がわかる。その底角の片方の内角の 2 等分線を引く。するとその中にもう 2 つの 2 等辺三角形ができる。すると、相似な大と小の黄金 3 角形ができる。従って、

$$x:1=1:(x-1) \quad x(x-1)=1 \quad x^2-x-1=0 \quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad x>0 \text{ であるので } x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{従って、} \cos 72^\circ = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \div x = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \cos^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

$$\text{従って} \quad \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \quad \text{だから} \quad \tan^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4} = 5+2\sqrt{5}$$

$$\text{従って} \quad \tan \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

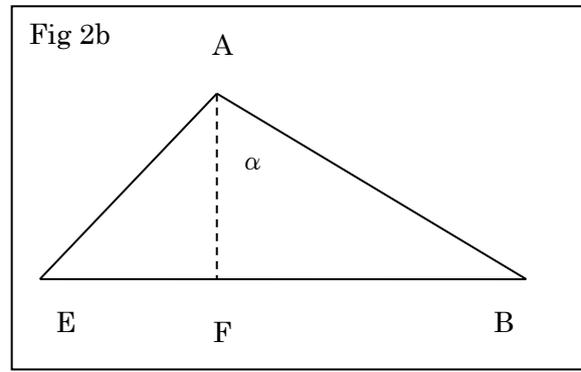
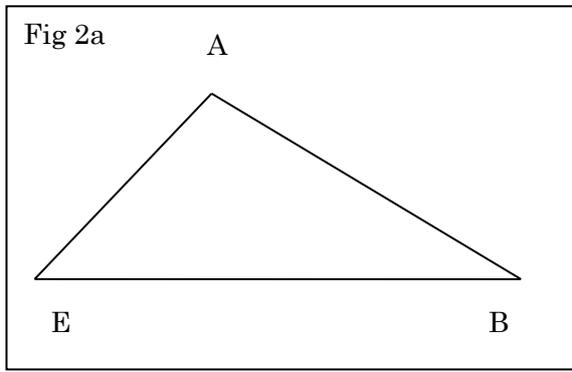
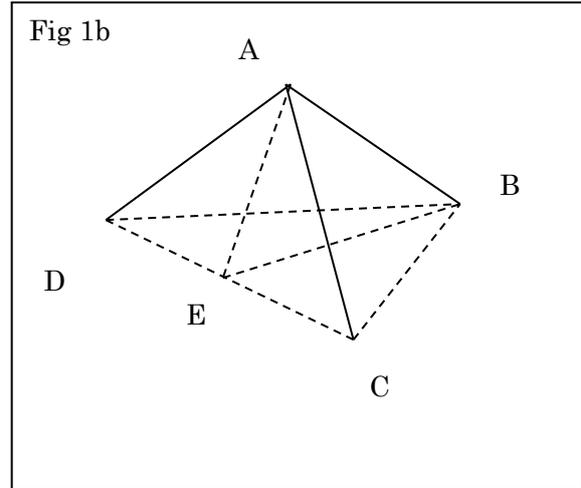
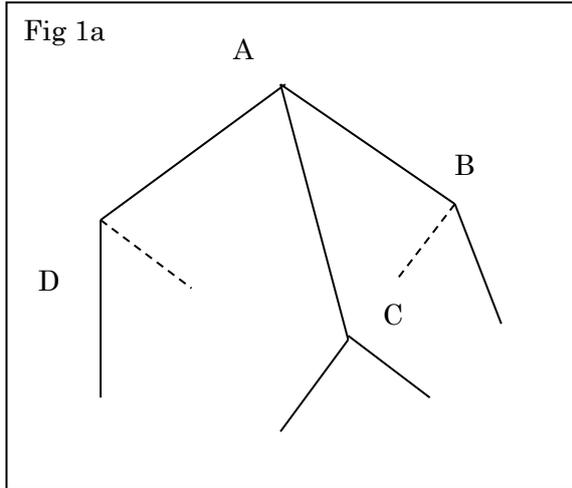
$$\text{さらに、左右のひらべったい 2 等辺 3 角形に注目すれば} \quad \cos 36^\circ = \cos \frac{\pi}{5} = \left(\frac{x}{2}\right) \div 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \quad \text{従って} \quad \sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{だから}$$

$$\tan^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4} = 5-2\sqrt{5} \quad \text{従って} \quad \tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{が得られる。}$$

以下、所々でこれらの値を使うことになる。

次に、正 12 面体の結合部の様子を見てみよう。



正 4 面体や正 6 面体と同様に点 F は正 3 角形 BCD の外心即ち重心となる。

$$AB = AC = AD = L \quad BC = CD = DB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}L \quad CE = DE = \frac{\sqrt{5}+1}{4}L$$

$$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}L \quad BF = BE \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}L \quad \text{であるので、}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \quad \sin^2 \alpha = \frac{6+2\sqrt{5}}{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{6} \quad \cos^2 \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{6}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{4} \quad \text{従って } \tan \alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

接合部、点 A の真上から見た図は正 4 面体や正 6 面体の図 3 と同様である。従って、角材の正方形の切

り口の一辺を M とするとき接合深さ $AG2 = \frac{1}{\sqrt{6}}M$ となる。

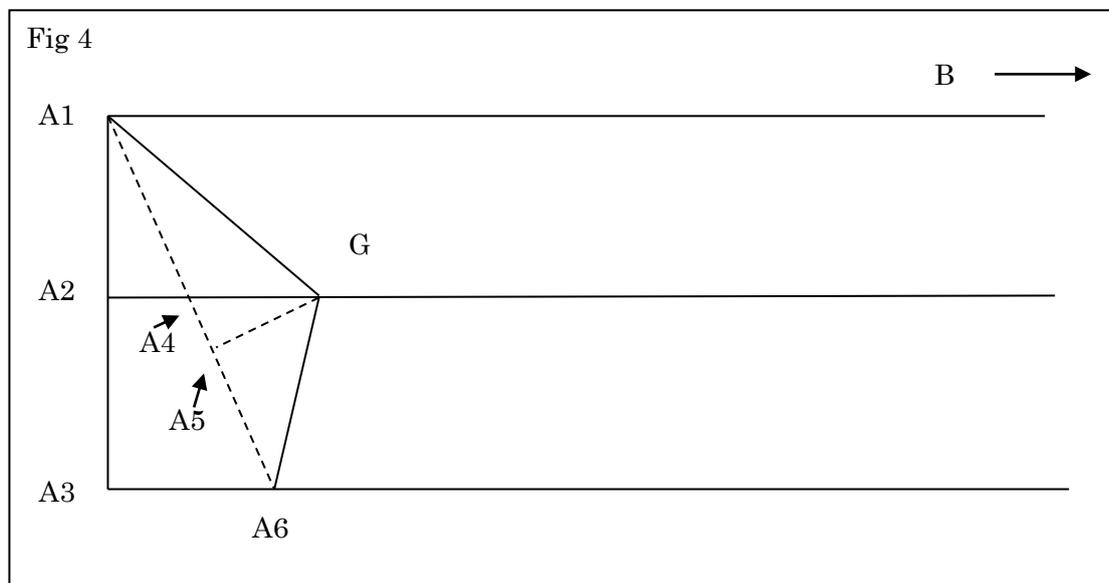
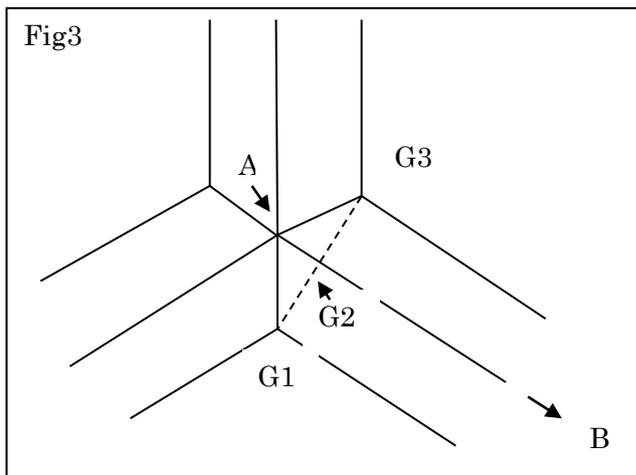
図 2b の向きから部材を見るのが図 4 である。図 3 の点 A の下に点 A4 や点 A5 がある。

図 2b の角 α と同じものが角 BA1A6 となる。 $\angle BA1A6 = \alpha = \angle A1A6A3$

$$\tan \alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{A1A3}{A3A6} \quad \text{従って}$$

$$A3A6 = \frac{2A1A3}{3+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}M = \frac{2\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{4}M = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}M \doteq 0.54M \dots \textcircled{1}$$

また $A2A4 = \frac{1}{2} A3A6 = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} M = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4} M$



前と同様に 図 3 の AG2 が図 4 の A5G となって表れる。 $A5G = \frac{1}{\sqrt{6}} M$

以前と同様に $\triangle A1A2A4 \sim \triangle GA5A4$ また $A1A6 = \sqrt{7-3\sqrt{5}} M = \sqrt{9-3\sqrt{5}} M$

従って $A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \sqrt{9-3\sqrt{5}} : \sqrt{2}$ 従って

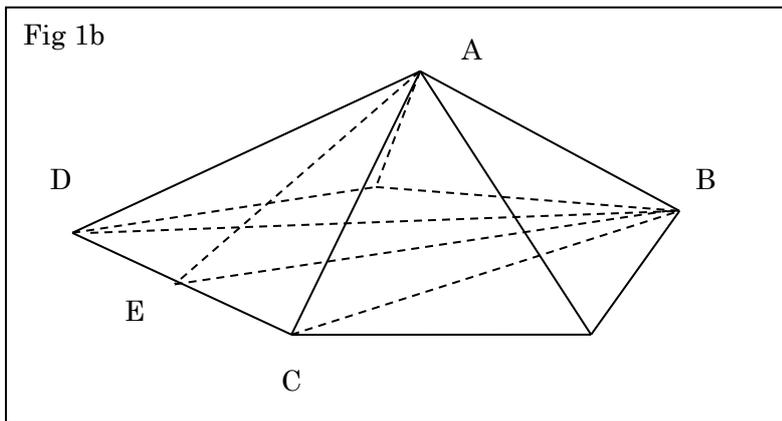
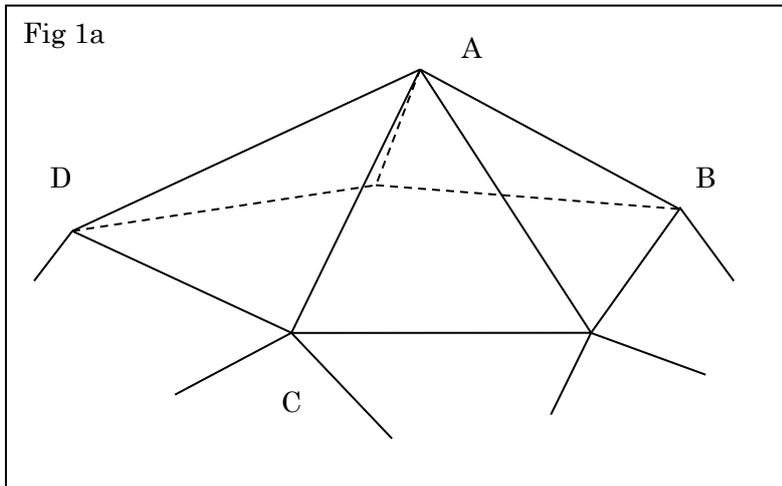
$$A4G = \frac{\sqrt{9-3\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} A5G = \frac{\sqrt{9-3\sqrt{5}}}{\sqrt{12}} M = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2} M = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} M = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} M = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} M$$

$$A2G = \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} \right) M = \frac{2\sqrt{2}}{4} M = \frac{\sqrt{2}}{2} M \doteq 0.71M \dots \textcircled{2}$$

これが 30 本で正十二面体ができる。

Sec.5 正 20 面体 Marking of Regular Icosahedron

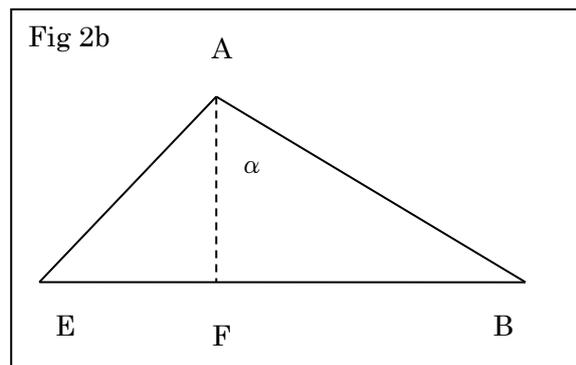
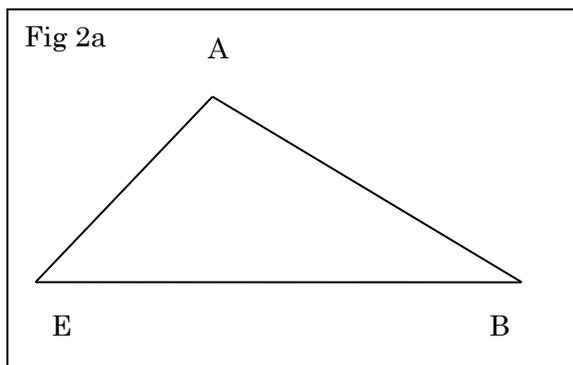
最後の正多面体は正 3 角形が 20 面で構成される。接合部は正 3 角形 5 つが集まる。5 本の部材が頂点に集まる。



辺 CD の中点 E を取り、3 角形 ABE を考える。

$$AB = AC = AD = CD = L \quad BC = DB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}L \quad CE = DE = \frac{1}{2}L \quad AE = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$BE = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}L = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}-1}{4}}L = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}L$$



A から辺 BE に下した垂線の足を F とする。今までの場合と違い、3 角形 BCD は 2 等辺 3 角形なので

点 F は重心ではなく、外心そのものである。少々計算は面倒になる。

$$AF = xL \quad BF = yL \quad \text{とすると} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} - y \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \quad \text{従って}$$

$$1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{4} - \sqrt{5+2\sqrt{5}}y = \frac{3}{4} \quad \sqrt{5+2\sqrt{5}}y = \frac{1}{4} + \frac{5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \quad y^2 = \frac{14+6\sqrt{5}}{4(5+2\sqrt{5})} = \frac{(7+3\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{2 \times (25-20)} = \frac{35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

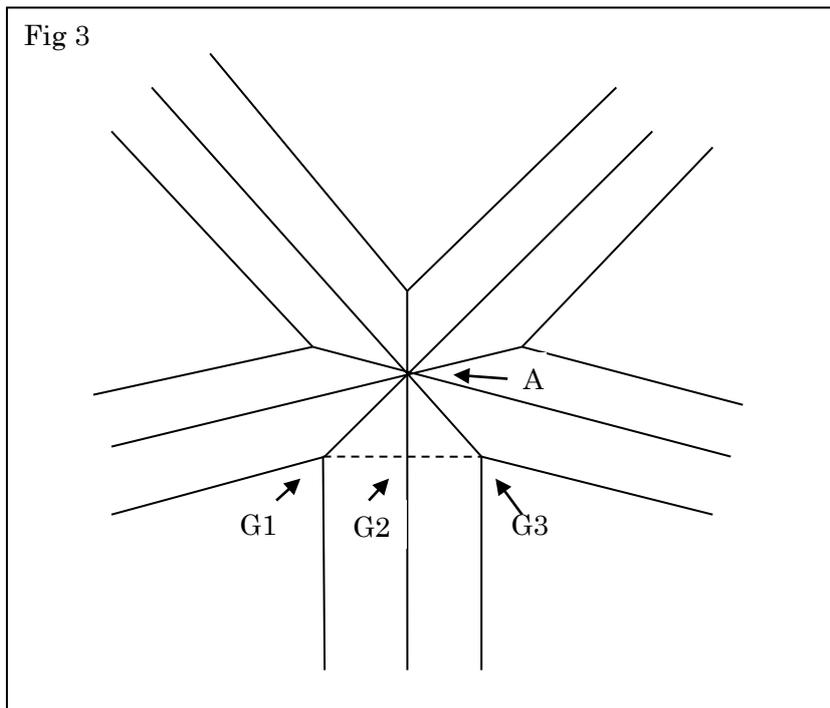
$$\text{改まって、} \quad y = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$$

$$x^2 = 1 - y^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

ここで垂直接合角 BAF を α とすると

$$\tan^2 \alpha = \frac{y^2}{x^2} = \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} \quad \text{従って} \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

次に点 A の真上から A に接した水平面への投影図を考える。今度は 5 本足のヒトデ型である。



$$\angle G1AG3 = 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \quad AB \perp G1G3 \quad \text{であるので水平接合角} \quad \angle G1AG2 = \frac{\pi}{5}$$

$$G1G3 = \sqrt{2}M \quad \text{であるから} \quad G1G2 = \frac{\sqrt{2}}{2}M \quad \text{さらに} \quad \frac{G1G2}{AG2} = \tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \text{であるので}$$

$$AG2 = \frac{G1G2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}M = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\sqrt{25-20}}M = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}M \quad \text{が得られる。}$$

次に図 2b の向きから見た角材の投影図を考える。

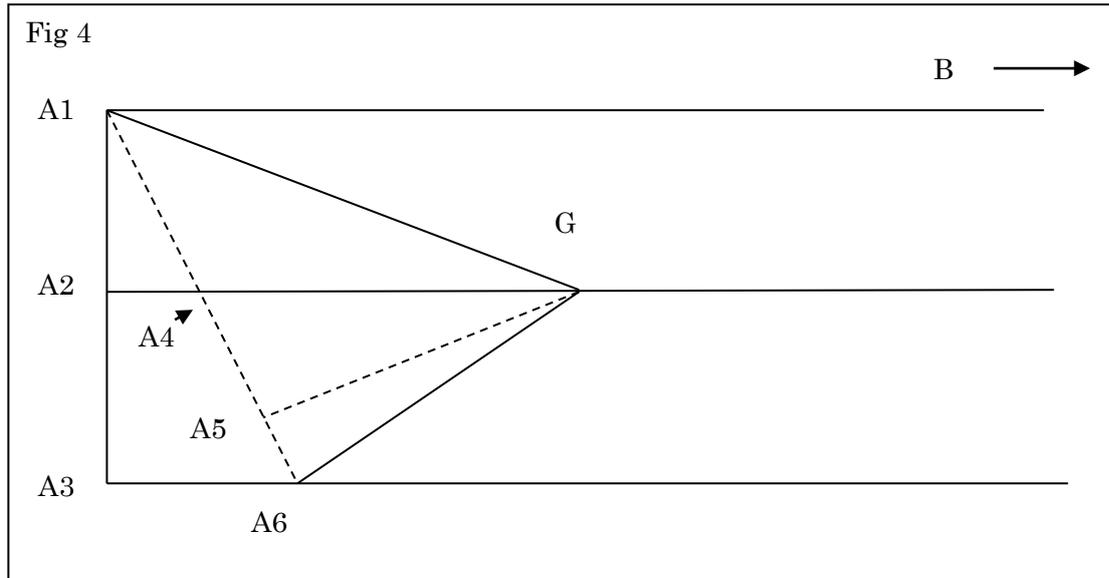


図 3 の点 A の下に点 A4 や点 A5 がある。

図 2b の角 α と同じものが角 $\angle BA1A6$ となる。 $\angle BA1A6 = \alpha = \angle A1A6A3$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{A1A3}{A3A6} \quad \text{従って}$$

$$A3A6 = \frac{2A1A3}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}M = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}M = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} \doteq 0.874M \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } A2A4 = \frac{1}{2}A3A6 = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}M$$

前と同様に 図 3 の $\angle AG2$ が図 4 の $\angle A5G$ となって表れる。 $A5G = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}M$

以前と同様に $\triangle A1A2A4 \sim \triangle GA5A4$ また $A1A6 = \sqrt{2 + \frac{6-2\sqrt{5}}{2}}M = \sqrt{5-\sqrt{5}}M$

従って $A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \sqrt{5-\sqrt{5}} : \sqrt{2}$ 従って

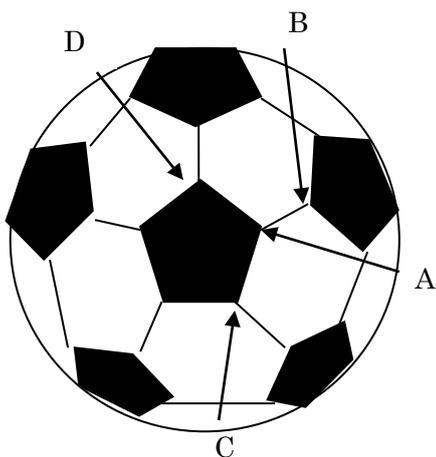
$$\begin{aligned} A4G &= \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}A5G = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\sqrt{10}}M = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}}{\sqrt{20}}M = \frac{\sqrt{15+5\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}M \\ &= \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}M = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}M \end{aligned}$$

$$A2G = A2A4 + A4G = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4} \right)M = \frac{\sqrt{10}}{2}M \doteq 1.581M \dots \textcircled{2}$$

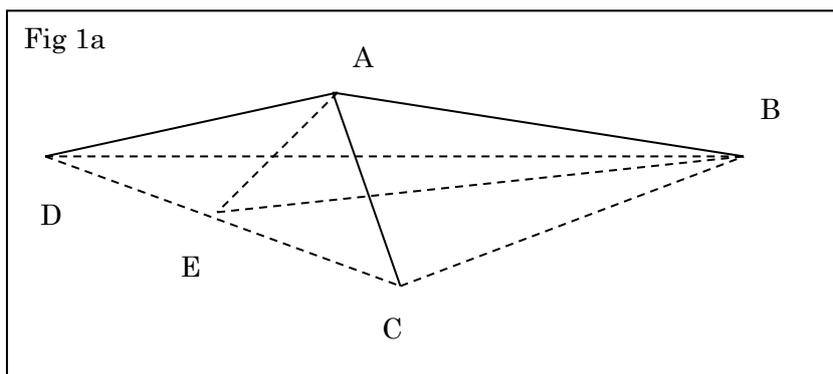
これは 30 本必要となる。これも大変。

ここまで来たら、次はフラーレン、昔のサッカーボール、C60 に取り組みます。

Sec.6 フラーレン Marking of Fullerene

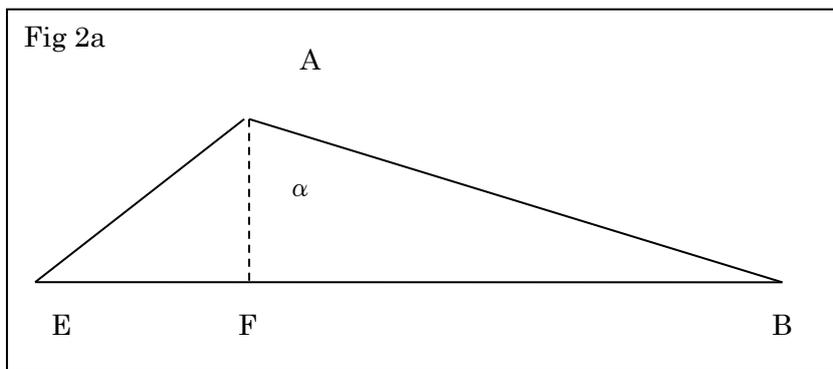


昔のサッカーボール。切頂 20 面体というそうで、辺の長さが共通の正 5 角形 12 枚と正 6 角形 20 枚からなる。60 個の頂点に正 5 角形 1 枚と正 6 角形 2 枚が集まっている。
 部材は 2 種類、2 つの正 6 角形に挟まれる部材 P が 30 本と正 6 角形と正 5 角形に挟まれる部材 Q が 60 本で計 90 本。



3 角形 ABC と 3 角形 ABD は正 6 角形の一部、3 角形 ACD は正 5 角形の一部。辺 AB が部材 P で辺 AD と AC が部材 Q である。

$$AB = AC = AD = L \quad BC = DB = \sqrt{3}L \quad CD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}L \quad CE = DE = \frac{\sqrt{5}+1}{4}L$$



$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}}L = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}L$$

$$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{3 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}}L = \frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{4}L = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}L$$

正多角形では AF は BE と直交するのが当然だったが、今回はそうではない。そもそも点 A から 3 角形 BCD に垂直に下した直線は立体全体の重心を通る保証はない。正 5 角形の重心から正 5 角形に垂直に下した直線や正 6 角形の重心から正 6 角形に垂直に下した直線なら立体全体の重心を通る。しかし、3 本の部材をつなぐときには BE に対して垂直な直線をとるのが計算が簡単であるのでここではそうする。図 2a では部材 P(辺 AB)について考える。

点 F は 3 角形 BCD の外心とする。正 20 面体と同様に計算は少々面倒である。

$$AF = xL \quad BF = yL \quad \text{とすると} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + \left(\frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{4} - y \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \right)^2 \quad \text{従って}$$

$$1 + \frac{42-2\sqrt{5}}{16} - \frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{2}y = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \quad \frac{\sqrt{42-2\sqrt{5}}}{2}y = 1 + \frac{21-\sqrt{5}}{8} - \frac{5-\sqrt{5}}{8} = 3$$

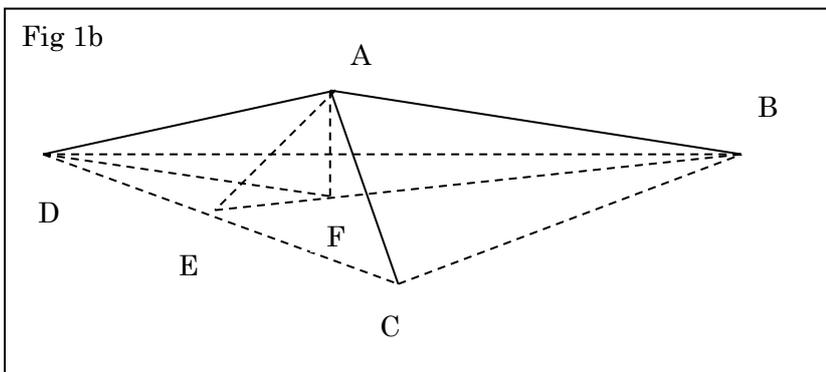
$$y = \frac{6}{\sqrt{42-2\sqrt{5}}} \quad y^2 = \frac{36}{42-2\sqrt{5}} = \frac{18}{21-\sqrt{5}} = \frac{18(21+\sqrt{5})}{436} = \frac{189+9\sqrt{5}}{218}$$

$$x^2 = 1 - y^2 = \frac{29-9\sqrt{5}}{218} \quad \text{ここで垂直接合角 BAF を } \alpha \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha &= \frac{y^2}{x^2} = \frac{189+9\sqrt{5}}{29-9\sqrt{5}} = \frac{9(21+\sqrt{5})(29+9\sqrt{5})}{436} = \frac{9(609+21 \times 9\sqrt{5}+29\sqrt{5}+45)}{4 \times 109} = \frac{9(654+218\sqrt{5})}{4 \times 109} \\ &= \frac{9(6+2\sqrt{5})}{4} = \left(\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{従って } \tan \alpha = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{2} \quad \text{つまり、部材 P の垂直接合角 } \alpha \text{ は } \tan^{-1} \frac{3(\sqrt{5}+1)}{2} \doteq 78.4^\circ$$

次に部材 Q について考える。図 1a に代わり次の図 1b と 2b を考える。



部材 Q の垂直接合角は角 DAF すなわち β となる。しかし、点 F は 3 角形 BCD の外心なので $BF=DF$ であるから 3 角形 ADF と先の 3 角形 ABF は合同なので、 $\beta = \alpha$ となる。従って部材 P と Q の垂直接合角は等しい。次に接合深さを調べる。

図 3 で本来は点 B と C と D はもっと遠くにあるのだが、近くにあるように書いた。

Fig 2b

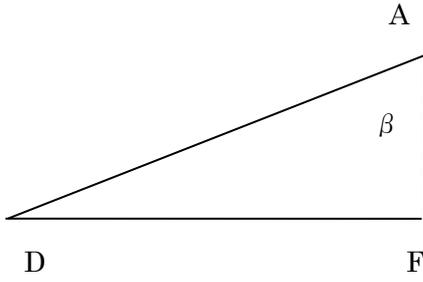
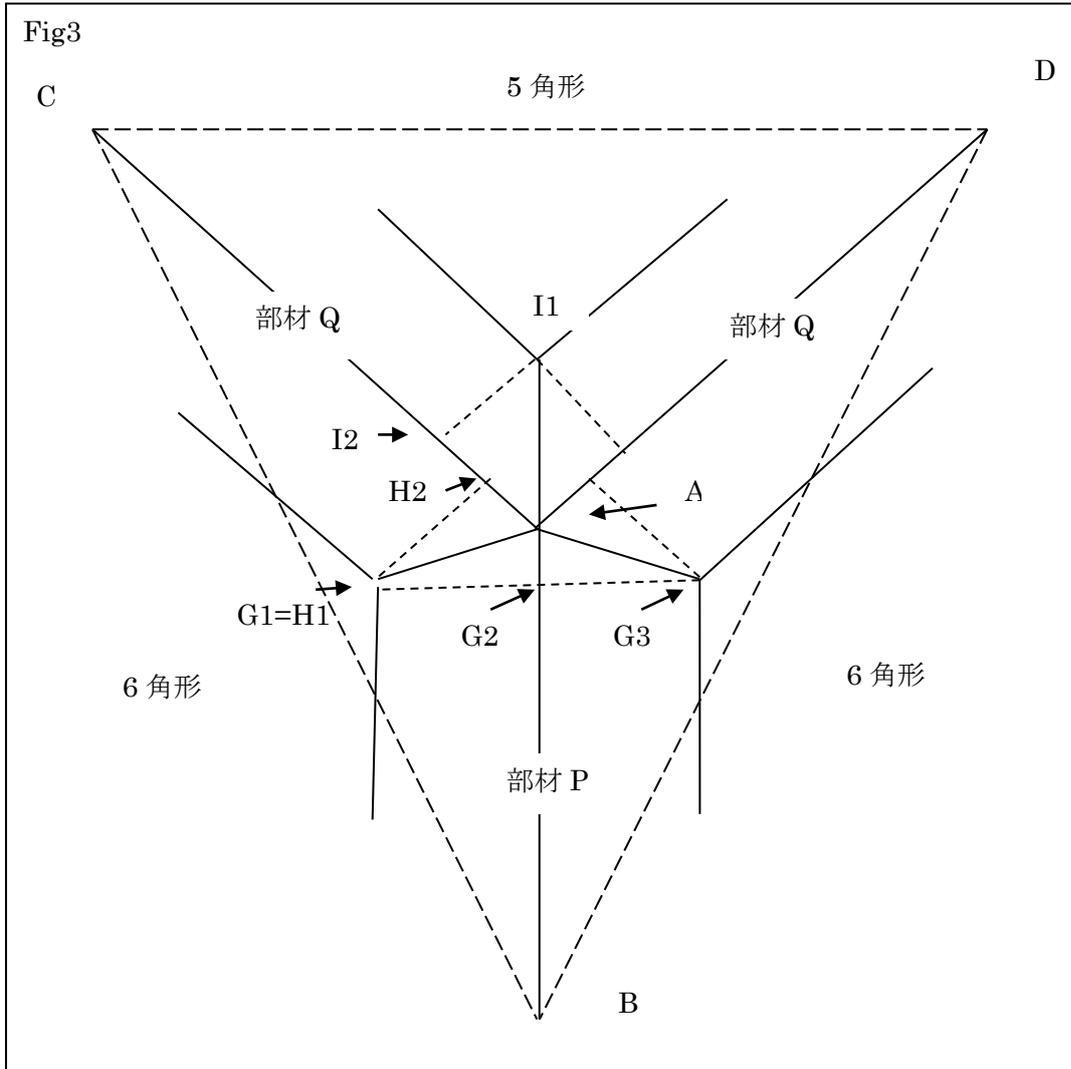


Fig3



$$AB = AC = AD = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{21-\sqrt{5}}} L \quad BC = DB = \sqrt{3}L \quad CD = \frac{\sqrt{5}+1}{2} L$$

部材 P の水平接合角は角 G2AG3(=θ 1 とする)だがこれは角 BAD の 2 分の 1 である。

部材 Q の水平接合角は 6 角形側は部材 P と同じで、5 角形側は角 CAD の 2 分の 1 即ち角 CAI1(=θ 2 とする)である。

3 角形 ABD や ACD は 2 等辺 3 角形なので、その半分の 3 角形は直角 3 角形となり計算は楽である。

点 A から辺 BD に下した足を J とすると、

$$AJ = \sqrt{AB^2 - BJ^2} = \sqrt{\frac{18}{21-\sqrt{5}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{21-\sqrt{5}} - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{18(21+\sqrt{5})}{436} - \frac{3 \times 109}{4 \times 109}}$$

$$= \sqrt{\frac{51+18\sqrt{5}}{4 \times 109}} = \sqrt{\frac{3(17+6\sqrt{5})}{4 \times 109}}$$

$$\text{従って } \tan \theta_1 = \frac{BJ}{AJ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{4 \times 109}{3(17+6\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{109}{17+6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{109(17-6\sqrt{5})}{109}} = \sqrt{17-6\sqrt{5}}$$

従って部材 P の両側と部材 Q の 6 角形側の接合深さ t1 は

$$t_1 = \frac{M}{\sqrt{2} \tan \theta_1} = \frac{M}{\sqrt{2(17-6\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{17+6\sqrt{5}}{2 \times 109}} M$$

点 A から辺 CD に下した足を K とすると、

$$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{\frac{36}{42-2\sqrt{5}} - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{21-\sqrt{5}} - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}}$$

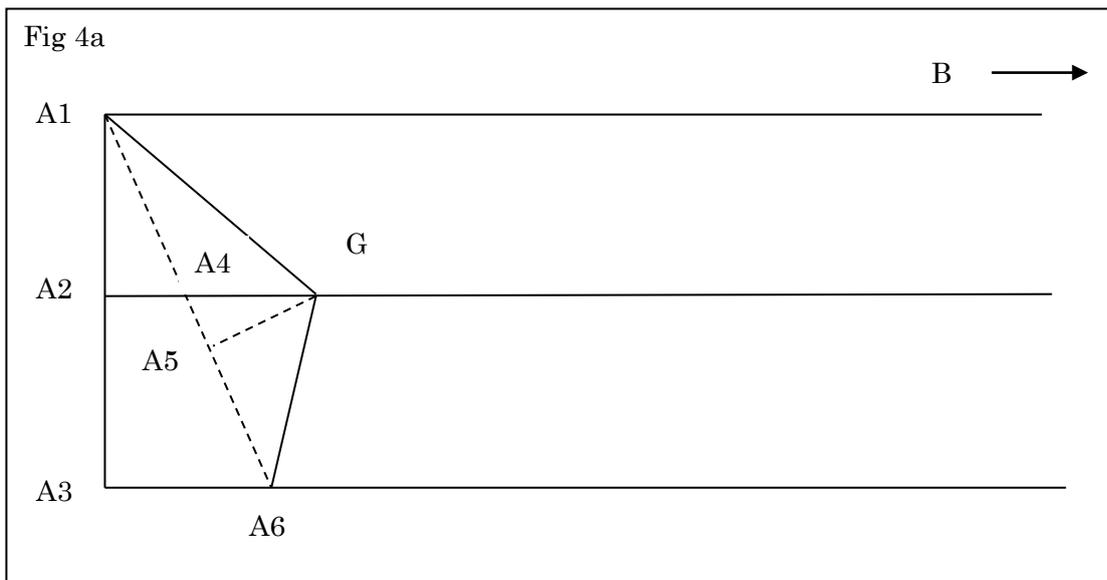
$$= \sqrt{\frac{18(21+\sqrt{5})}{436} - \frac{(3+\sqrt{5}) \times 109}{8 \times 109}} = \sqrt{\frac{429-73\sqrt{5}}{8 \times 109}}$$

$$\text{従って } \tan \theta_2 = \frac{CK}{AK} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \times \sqrt{\frac{8 \times 109}{429-73\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{109}{429-73\sqrt{5}}}$$

従って部材 Q の 5 角形側の接合深さ t2 は

$$t_2 = \frac{M}{\sqrt{2} \tan \theta_2} = \frac{M}{(\sqrt{5}+1)} \times \sqrt{\frac{429-73\sqrt{5}}{109}}$$

部材 P の両側と部材 Q の 6 角形側の墨出しは次のようになる。



$$\angle BA_1A_6 = \alpha = \angle A_1A_6A_3$$

$$\tan \alpha = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{2} = \frac{A1A3}{A3A6} \quad \text{従って}$$

$$A3A6 = \frac{2A1A3}{3(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{2}}{3(\sqrt{5}+1)}M = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{3 \times 4}M = \frac{\sqrt{5}-1}{3\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{6}M \doteq 0.2913M \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } A2A4 = \frac{1}{2}A3A6 = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12}M$$

前と同様に 図 3 の AG2 が図 4a の A5G となって表れる。 $A5G = t1 = \sqrt{\frac{17+6\sqrt{5}}{2 \times 109}}M$

以前と同様に $\Delta A1A2A4 \sim \Delta GA5A4$ また

$$A1A6 = \sqrt{A1A3^2 + A3A6^2} = \sqrt{2 + \frac{12-2\sqrt{20}}{36}}M = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3}M$$

$$\text{従って } A4G : A5G = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3} : \sqrt{2}$$

$$A4G = \sqrt{\frac{17+6\sqrt{5}}{2 \times 109}} \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}}M = \frac{\sqrt{17+6\sqrt{5}}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{6\sqrt{109}}M$$

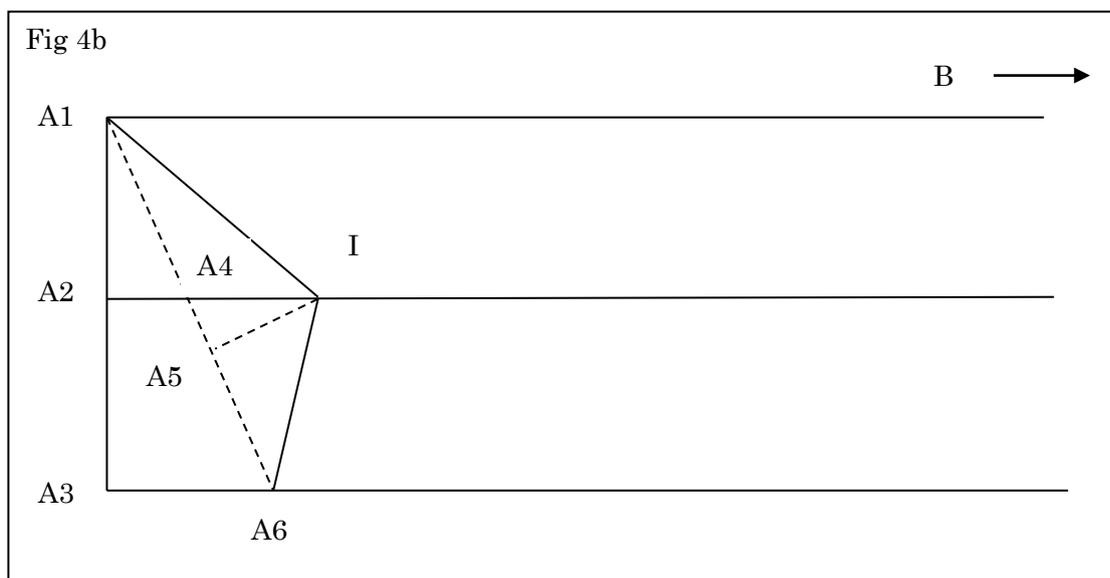
$$A2G = A2A4 + A4G = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{17+6\sqrt{5}}\sqrt{21-\sqrt{5}}}{6\sqrt{109}} \right)M \doteq 0.5270M \dots \textcircled{2}$$

この①と②で部材 P を 30 本作る。また 60 本の部材 Q の 6 角形側を同様に墨出しする。

次に部材 Q の 5 角形側の墨出しを行う。

$$A3A6 = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{6}M \doteq 0.2913M \dots \textcircled{1} \quad A2A4 = \frac{1}{2}A3A6 = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12}M \quad A1A6 = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3}M$$

は部材 P と同一。垂直接合角は共通だからである。



今度は 図 3 の A12 が図 4b の A5I となって表れる。 $A5I = t2 = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \sqrt{\frac{429-73\sqrt{5}}{2 \times 109}} M$

以前と同様に $\Delta A1A2A4 \cap \Delta IA5A4$ 従って

$$A4I : A5I = A1A4 : A1A2 = A1A6 : A1A3 = \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3} : \sqrt{2}$$

$$A4I = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \sqrt{\frac{429-73\sqrt{5}}{109}} \frac{\sqrt{21-\sqrt{5}}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} M = \frac{\sqrt{429-73\sqrt{5}} \sqrt{21-\sqrt{5}}}{3\sqrt{2}\sqrt{109}(\sqrt{5}+1)} M$$

$$A2I = A2A4 + A4I = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{429-73\sqrt{5}} \sqrt{21-\sqrt{5}}}{3\sqrt{2}\sqrt{109}(\sqrt{5}+1)} \right) M \doteq 0.6383M \dots \textcircled{3}$$

上記の①と③で部材 Q の 5 角形側を加工する。

本校の建築科の生徒に作ってもらう予定である。

Sec.7 まとめ(その1) Conclusion1

多面体について、垂直接合角 α 、水平接合角 θ 、接合深さ t の関係は次の通り。

$$t = \frac{M}{\sqrt{2} \tan \theta}$$

部材下部長 x は $x = \frac{\sqrt{2}M}{\tan \alpha}$

部材側部長 y は $y = \frac{1}{2}x + t = \frac{1}{2}x + \frac{t}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha \tan \theta} \right) M$

しかし、この式を見ただけでは多面体の特異な数値は浮かび上がらない。なにがしかの共通な数値の美しさを感じた。特に、フラレーンの計算の途中に 109 という素数が頻繁に出てくる。その根号を用いた「因数分解」が 3 通り表れていた。

$$109 = (17 - 6\sqrt{5})(17 + 6\sqrt{5}) = \left(\frac{21 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{21 + \sqrt{5}}{2} \right) = \left(\frac{429 - 73\sqrt{5}}{2 \times 19} \right) \left(\frac{429 + 73\sqrt{5}}{2 \times 19} \right)$$

似たものは人為的にいくらでも作ることができる。例えば上の $21 + \sqrt{5}$ と $17 + 6\sqrt{5}$ の「差」である $5\sqrt{5} + 4$ でも $109 = (5\sqrt{5} - 4)(5\sqrt{5} + 4)$ と「因数分解」できる。しかし、この値はフラレーンの計算には出てこない。上記の数値は自然界のなんらかの特徴を表していると思わざるを得ない。

この話が行き着く先は多分ガロア数体 $Q(\sqrt{5})$ についての類体論だろう。

多面体を構成する部材の墨付け寸法

M は角材切り口の 1 辺の長さ

対象と構成	下部長	側部長
正 4 面体 正 3 角形 4 面 部材 6 本	$2M$	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) M \doteq 1.71M$
正 6 面体 正方形 6 面 部材 12 本	M	M
正 8 面体 正 3 角形 8 面 部材 12 本	$\sqrt{2}M$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) M \doteq 1.71M$
正 12 面体 正 5 角形 12 面 部材 30 本	$\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} M \doteq 0.54M$	$\frac{\sqrt{2}}{2} M \doteq 0.71M$
正 20 面体 正 3 角形 20 面 部材 30 本	$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2} M \doteq 0.874M$	$\frac{\sqrt{10}}{2} M \doteq 1.581M$

不等辺 3 角錐(頭頂部) 側面 2:2:1 底面 1:1:1 底部については本文参照	$\sqrt{22}M \doteq 4.69M$	$\left(\frac{\sqrt{22}}{2} + \sqrt{2}\right)M \doteq 3.76M$
フラーレン 正 5 角形 12 面 (正)6 角形 20 面 部材 P(6 角形と 6 角形の 間)30 本 部材 Q(6 角形と 5 角形の 間)60 本	$\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{6}M \doteq 0.291M$	部材 P 両側と部材 Q 6 角形側 $\left(\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{17 + 6\sqrt{5}\sqrt{21 - \sqrt{5}}}}{6\sqrt{109}}\right)M$ $\doteq 0.527M$ 部材 Q 5 角形側 $\left(\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{429 - 73\sqrt{5}\sqrt{21 - \sqrt{5}}}}{3\sqrt{2}\sqrt{109}(\sqrt{5} + 1)}\right)M$ $\doteq 0.638M$

この表を作って気付きましたがフラーレンの下部長と正 12 面体の下部長が等しく、あるいは近い数値になるべきかと思います。どちらか又は両方が間違えている可能性があります。勘違いでしょうか。どなたか検算をして頂けないでしょうか。

検算よりも作ってみるのが早いかもしれません。実際に作ったのは 4 面体、8 面体の半分、不等辺 3 角錐です。まだまだ修行が足りません。今夏挑戦します。

Continued.